Quantenmechanik I
Serie 1

WS 05/06
Prof. G. Blatter

Aufgabe 1.1 System mit einem Freiheitsgrad

a) Betrachte ein System mit einem Freiheitsgrad, das Zustände mit Energien $E \in [0, \infty[$ annehmen kann. Die Wahrscheinlichkeit, dass sich das System bei der Temperatur T in einem Zustand mit Energie E befindet ist gegeben durch den Bolzmann-Faktor. Berechne den Erwartungswert für die Energie

$$\langle E \rangle_{\text{klass.}} = \frac{\int_0^\infty \mathrm{d}E \; E \, e^{-\beta E}}{\int_0^\infty \mathrm{d}E \; e^{-\beta E}} \;, \quad \text{mit} \;\; \beta = \frac{1}{kT} \;.$$

b) Modifiziere obiges System dahingehend, dass nur mehr diskrete Energien $E_n = \hbar\omega n$, $n \in \mathbb{N}$ erlaubt sind. Wie ändert sich der Erwartungswert der Energie?

$$\langle E \rangle_{\text{quant.}} = \frac{\sum_{n=0}^\infty E_n \, e^{-\beta E_n}}{\sum_{n=0}^\infty e^{-\beta E_n}}$$

c) Diskutiere die Grenzfälle hoher ($kT \gg \hbar\omega$) und tiefer ($kT \ll \hbar\omega$) Temperaturen.

Aufgabe 1.2 Hohlraumstrahlung

In der Geburtsstunde der Quantenmechanik gelang es Max Planck 1900 eine Vorhersage für die Energiedichte von thermischer elektro-magnetischer Strahlung zu machen. Wir wollen diesen physikalischen Meilenstein nun nachvollziehen.
Betrachte dazu einen kubischen Hohlraum mit Kantenlänge L. Im Inneren des Körpers befindet sich ein Strahlungsfeld im thermischen Gleichgewicht bei Temperatur T.

a) Unter Annahme von Randbedingungen ($\vec{E}_\parallel = 0$ auf dem Rand), welche Werte des Wellenvektors $\vec{k}$ sind für die Moden im Inneren erlaubt? Berechne das Volumen pro Mode im Impulsraum.

b) Fasse nun jede einzelne Mode als System im Sinne von Aufg.(1.1) auf (es gilt $\omega = c|\vec{k}|$, ausserdem gibt es zu jedem Wellenvektor $\vec{k}$ zwei von einander unabhängige Polarisationen/ Freiheitsgrade). Berechne nun die spektrale Energiedichte $u(\omega, T)$ im makroskopischen Limes $\lambda \ll L$, für den klassischen (Rayleigh-Jeans) und den quantentisierten Fall (Planck).

$$\frac{U}{L^3} = \int_0^\infty \mathrm{d}\omega \;\; u(\omega, T)$$

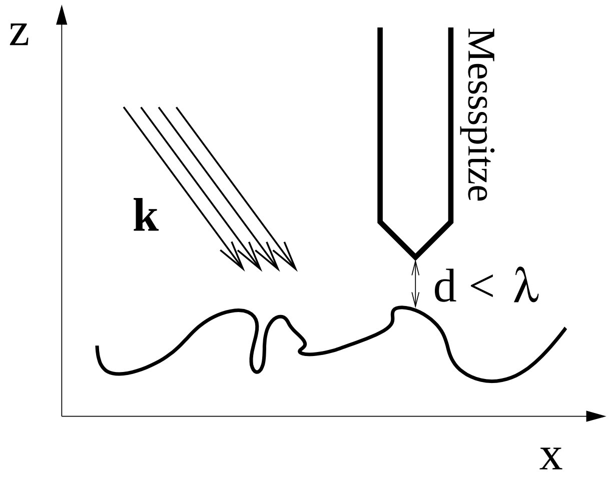
c) Berechne für den quantisierten Fall die gesamte Energiedichte der Hohlraumstrahlung U/L^3 als Funktion von T (Stefan-Boltzmann) und zeige, dass im klassischen Fall das Ergebnis divergent ist.

Aufgabe 1.3 De Broglie Wellenlänge

Berechne die De Broglie-Wellenlänge für Elektronen mit Energien im eV-Bereich $\lambda(E[eV])$ (siehe Skript Glg.(0.17))

Aufgabe 1.4 Nahfeldmikroskopie

Das Auflösungsvermögen eines herkömmlichen Mikroskops ist durch die Lichtwellenlänge gegeben, $\Delta x = \lambda/2\sin\theta$, und gehorcht damit der Heisenberg'schen Unschärferelation. In den letzten Jahren wurde es möglich, das Nahfeld einer gestreuten Welle zu messen und so jene Teile der Streuwelle zu detektieren die in z-Richtung exponentiell gedämpft sind (siehe Skizze). Zeige, dass in diesem Fall die Auflösung in x-Richtung nicht obiger Beschränkung unterliegt. Wodurch ist das Auflösungsvermögen in diesem Fall limitiert?



Aufgabe 1.5 Klassische Wirkung

In der klassischen Mechanik ist die Wirkung definiert durch

$$S[q,t] = \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t' L(q,\dot{q},t') \ .$$

a) Für klassische Bahnen $\delta S[q,t]|_{q_{\text{klass.}}} = 0$ mit festgehaltenem Anfangspunkt $q(t_0) = q_{t_0}$ kann man S auffassen als Funktion von $S(q_t, t)$. Zeige nun, dass gilt

$$\frac{\partial S}{\partial q_t} = p_t \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial S}{\partial t} = -H \ .$$

b) Berechne die Wirkung entlang der klassischen Bahn für folgende Systeme:

(i) Freies Teilchen

(ii) Harmonischer Oszillator ($V(q) = m\omega^2 q^2/2$)

(iii) Konstante Kraft ($V(q) = -Fq$)

Benutze als Anfangsbedingung jeweils $q_{t_0} = 0$.

S.H.