Serie 12: Spin-Wellen in Ferromagneten und Antiferromagneten

Abgabe: 25. Januar 2005

Wir betrachten ein Spin-System auf einem hyper-kubischen Gitter, auf das ein Magnetfeld H in z-Richtung wirkt. Der Hamilton-Operator ist

$$\hat{\mathcal{H}} = J \sum_{n,\delta} \mathbf{S}_n \cdot \mathbf{S}_{n+\delta} - g\mu_{\rm B} H \sum_n S_n^z \,, \tag{1}$$

wobei δ über die nächsten Nachbarn läuft. Ein negatives Vorzeichen der Kopplungskonstante $J < 0$ entspricht einem Ferromagneten, ein positives Vorzeichen $J > 0$ beschreibt einen Antiferromagneten. Da die Spin-Operatoren Vertauschungsrelationen erfüllen, die weder bosonisch noch fermionisch sind, müssen von Fall zu Fall verschiedene Approximationsverfahren angewendet werden. Im Fall einer geordneten ferromagnetischen oder antiferromagnetischen Phase in drei Dimensionen kann eine der beiden folgenden Methoden verwendet werden (vgl. auch die beiden Bücher (i) R. P. Feynman “Statistical Mechanics” und (ii) K. Yosida “Theory of Magnetism”).

Methode der Bewegungsgleichung: Man beginnt mit Heisenbergs Bewegungsgleichung für den $n$ten Spin

$$\frac{d}{dt}\mathbf{S}_n = \frac{i}{\hbar}\left[\hat{\mathcal{H}}, \mathbf{S}_n\right] \ . \tag{2}$$

Dann berechnet man den Kommutator in Glg. (2) und linearisiert ihn um einen gegebenen Grundzustand — ferromagnetisch oder antiferromagnetisch (siehe unten). Mittels einer Fourier-Transformation werden Bloch-Zustände konstruiert und man erhält die Magnon-Dispersion.

Holstein-Primakoff-Methode: Eine rigorosere Herleitung der bosonischen Statistik von Spin-Wellen bei tiefen Temperaturen basiert auf der folgenden Darstellung der Spin-Operatoren

$$S^z = S - a^\dagger a \ , \quad S^+ = \sqrt{2S}\left(1 - \frac{a^\dagger a}{2S}\right)^{1/2} a \ , \quad S^- = a^\dagger \sqrt{2S}\left(1 - \frac{a^\dagger a}{2S}\right)^{1/2} , \tag{3}$$

Hier ist $S^\pm = S^x \pm iS^y$. Alle Zustände mit den verschiedenen Werte von $S^z = m$, $-S \le m \le S$ können eindeutig mit bosonischen Zuständen mit Besetzungszahlen $0 \le n \le 2S$ identifiziert werden. Bei niedrigen Temperaturen werden nur wenige Magnonen angeregt, und man kann den Term $a^\dagger a$ unter den Quadratwurzeln in Glg. (3) vernachlässigen. Das Ergebnis für die Spin-Komponenten wird in den Hamilton-Operator $\hat{\mathcal{H}}$ eingesetzt, und man erhält dessen bosonische Darstellung.

Wähle eine Methode und löse die beiden folgenden Aufgaben mit dieser!

Aufgabe 12.1 Ferromagneten

Der Ausgangspunkt für beide Methoden ist die gesättigte Phase mit einem Zustand, in dem alle Spins nach oben zeigen: $|\uparrow\uparrow\ldots\rangle$. Bestimme die Magnon-Dispersion! Nützliche Abkürzungen sind

$$h = \frac{g\mu_{\rm B}H}{|J|zS}, \qquad \gamma_{\boldsymbol{k}} = \frac{1}{z}\sum_\delta e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\mathbf{R}_\delta}, \tag{4}$$

wobei z die Anzahl der nächsten Nachbarn in dem Gitter ist ($z = 6$ für ein kubisches Gitter).

Was ist der Unterschied zwischen dem niederenergetischen Teil des Spektrums für $H = 0$ und $H \neq 0$, und woher rührt dieser?

Aufgabe 12.2 Antiferromagneten

Hier ist der Ausganspunkt der Néel-Zustand $|\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow \ldots\rangle$, in dem alle Spins in dem Untergitter A (B) nach unten (oben) zeigen (hier betrachten wir nur den Fall $H = 0$). Das gekoppelte System der Bewegungsgleichungen ist nun doppelt so gross wie im ferromagnetischen Fall.

In der Holstein-Primakoff Behandlung des antiferromagnetischen Spin-Systems muss man nun zwei Arten von Bosonen einführen: $a_n^\dagger$ und a_n auf dem Untergitter A und $b_n^\dagger$ sowie b_n auf dem Untergitter B. Die Fourier-Transformation modifiziert sich nun zu

$$a_{\boldsymbol{k}}^\dagger = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_n e^{i\boldsymbol{k}\cdot\mathbf{R}_n} a_n^\dagger, \qquad a_{\boldsymbol{k}} = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_n e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\mathbf{R}_n} a_n, \tag{5}$$

$$b_{\boldsymbol{k}}^\dagger = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_n e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\mathbf{R}_n} b_n^\dagger, \qquad b_{\boldsymbol{k}} = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_n e^{i\boldsymbol{k}\cdot\mathbf{R}_n} b_n \ . \tag{6}$$

Der bosonische Hamilton-Operator wird durch eine Bogoliubov-Transformation diagonalisiert

$$a_{\boldsymbol{k}} = \cosh\theta_{\boldsymbol{k}}\alpha_{\boldsymbol{k}} - \sinh\theta_{\boldsymbol{k}}\beta_{\boldsymbol{k}}^\dagger, \qquad a_{\boldsymbol{k}}^\dagger = \cosh\theta_{\boldsymbol{k}}\alpha_{\boldsymbol{k}}^\dagger - \sinh\theta_{\boldsymbol{k}}\beta_{\boldsymbol{k}}, \tag{7}$$

$$b_{\boldsymbol{k}} = -\sinh\theta_{\boldsymbol{k}}\alpha_{\boldsymbol{k}}^\dagger + \cosh\theta_{\boldsymbol{k}}\beta_{\boldsymbol{k}}, \qquad b_{\boldsymbol{k}}^\dagger = -\sinh\theta_{\boldsymbol{k}}\alpha_{\boldsymbol{k}} + \cosh\theta_{\boldsymbol{k}}\beta_{\boldsymbol{k}}^\dagger. \tag{8}$$

Prüfe, dass die neuen Operatoren $\alpha_{\mathbf{k}}$ und $\beta_{\mathbf{k}}$ für beliebiges $\theta_{\mathbf{k}}$ die bosonischen Vertauschungsrelationen erfüllen! Wähle $\tanh 2\theta_{\boldsymbol{k}}$ so, dass der Hamilton-Operator diagonalisiert wird.