Serie 7: Lineare Antowort II

Abgabe: 7. Dezember 2004

Aufgabe 7.1 Strukturfaktor

Der Dichte-Operator eines N-Teilchen-Systems ist durch,

$$\rho_q = \int d^3\vec{r}\ \rho(\vec{r})\ e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}} = \sum_i \int d^3\vec{r}\ \delta(\vec{r}-\vec{r}_i) e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}} = \sum_i e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}_i}, \tag{1}$$

gegeben, wobei die Summe über i der Summe über die Teilchen entspricht. Seien $|n\rangle$ die Eigenzustände des Systems und $|0\rangle$ der Grundzustand. Sei $\omega_{n0} = E_n - E_0$ die Anregungsenergie des Zustands $|n\rangle$. Man definiert den Strukturfaktor als,

$$S(q,\omega) = \sum_n |\langle n|\rho_q^\dagger|0\rangle|^2 \delta(\omega - \omega_{n0}). \tag{2}$$

[a] Zeige, dass der Strukturfaktor eines beliebiges N-Teilchen-Systems ohne geschwindigkeitsabhängige Wechselwirkungen die folgende Summenregel (f-Summenregel)

$$\int_0^\infty \omega S(q,\omega) d\omega = \frac{Nq^2}{2m}, \tag{3}$$

erfüllt.

Hinweis: Berechne den Kommutator,

$$[[\rho_q, H], \rho_q^\dagger], \tag{4}$$

mit der Hilfe der Kontinuitätsgleichung,

$$\frac{\partial \rho_q}{\partial t} = -i[\rho_q, H] = -i\vec{q}\cdot\vec{J}_{\vec{q}}, \tag{5}$$

wobei $\vec{J}_{\vec{q}}$ der Strom-Operator,

$$\vec{J}_{\vec{q}} = \frac{1}{2}\sum_i \left\{ \frac{\vec{p}_i}{m} e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}_i} + e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}_i}\frac{\vec{p}_i}{m} \right\}, \tag{6}$$

ist. Berechne dann, $\langle 0|[[\rho_q, H], \rho_q^\dagger]|0\rangle$ und vergleiche mit der Definition, Gl. (2).

[b] Zeige, dass die Ladungs-Suszeptibilität eines N-Elektronen-Systems durch,

$$\chi(\vec{q},\omega) = \int_0^\infty d\omega'\ S(\vec{q},\omega') \left\{ \frac{1}{\omega - \omega' + i\eta} - \frac{1}{\omega + \omega' + i\eta} \right\}, \tag{7}$$

gegeben ist. Zeige, insbesondere dass,

$$\Im\chi(\vec{q},\omega) = -\pi \left\{ S(\vec{q},\omega) - S(\vec{q},-\omega) \right\}, \tag{8}$$

wobei $\Im\chi(\vec{q},\omega)$ der Imaginärteil der Suszeptibilitätsfunktion ist.

Hinweis: Berechne, wie sich die Ladungsdichte durch das Potential,

$$\phi(\vec{q},t) = \phi(\vec{q},\omega) e^{-i\omega t} + \text{H.c.} \tag{9}$$

ändert, bis zur ersten Ordnung in zeitabhängige Störungstheorie.

[c] Zeige, dass sich die Energie des Systems infolge des zeitabhängigen Potentials, wie

$$\frac{dE}{dt} = 2\pi\omega|\phi(\vec{q},\omega)|^2 S(\vec{q},\omega), \tag{10}$$

entwickelt.

Hinweis: Beachte, dass

$$\frac{dE}{dt} = e\phi(\vec{q},t)(-i\vec{q}) \cdot \langle \vec{J} \rangle \tag{11}$$

und $\langle \vec{q} \cdot \vec{J}_q \rangle = \omega \langle \rho(\vec{q},\omega) \rangle$, sodass die absorbierte Energie durch $\Im\chi$ ausgedrückt werden kann.

Aufgabe 7.2 Strukturfaktor des Elektronengases

[a] Berechne den Strukturfaktor des nichtwechselwirkenden Elektronengases in 3D. Zeige, dass

$$S^0(\vec{q},\omega) = \begin{cases} \frac{\nu(0)}{2}\frac{\omega}{qv_F} & \text{falls, } 0 \le \omega \le qv_F - \frac{q^2}{2m}, \\ \frac{\nu(0)}{2}\frac{p_F}{2q}\left[1 - \left(\frac{\omega}{qv_F} - \frac{q}{2p_F}\right)^2\right] & \text{falls, } \left|qv_F - \frac{q^2}{2m}\right| \le \omega \le qv_F + \frac{q^2}{2m}, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \tag{12}$$

wobei $v_F = p_F/m$ die Fermigeschwindigkeit ist und $\nu(0) = 3mN/p_F^2$ die Zustandsdichte.

[b] Zeige, dass der Strukturfaktor des wechselwirkenden Elektronengases durch,

$$S(\vec{q},\omega) = \frac{q^2}{4\pi e^2}\frac{\Im\epsilon(\vec{q},\omega)}{|\epsilon(\vec{q},\omega)|^2}, \tag{13}$$

gegeben ist, wobei $\epsilon(\vec{q},\omega)$ die Dielektrizitätsfunktion ist.

[c] Skizziere $S(\vec{q},\omega)$ des wechselwirkenden Elektronengases in der RPA-Näherung. Zeige, dass die Plasmon-Pole in $\epsilon(\vec{q},\omega)^{-1}$ zu einer δ-Singularität in $S(\vec{q},\omega)$ führen.