Serie 6: Jellium-Modell eines Metalls

Abgabe: 7. Dezember, 2005

Aufgabe 6.1 Paarkorrelationsfunktion

Berechne die Paarkorrelationsfunktion (3.13) aus dem Skript, indem du (3.12) berechnest. Berechne dann auch noch das Integral (3.14).

Aufgabe 6.2 Reflektivität

Im Skript wurde die Dielektrizitätsfunktion für freie Elektronen berechnet. Wir wollen nun ein weiteres einfaches Modell für die Dielektrizitätsfunktion verwenden und betrachten gedämpfte harmonische Oszillatoren mit Masse m, Ladung e und Dämpfung γ.
Die Bewegungsgleichung lautet dann

$$m\ddot{x} + m\gamma\dot{x} + m\omega_0^2 x = eEe^{-i\omega t} \tag{1}$$

1. Zeige, dass die Suszeptibilität der Oszillatoren durch

$$\chi_{\text{osc}} = \frac{ne^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma} \tag{2}$$

   gegeben ist, wobei n die Anzahl Osizillatoren pro Einheitsvolumen bezeichnet.

2. Die dazugehörige Dielektrizitätsfunktion ist $\varepsilon_{\text{osc}} = 1 + 4\pi\chi_{\text{osc}}$. Diese Dielektrizitätsfunktion ist ziemlich allgemein. Zum Beispiel können auch die Beiträge von Phononen zur Susceptibilität durch solche Terme beschrieben werden. Beachte, dass wir für ungebundene, $\omega_0 = 0$, nicht-wechselwirkende, $\gamma = 0$, Elektronen die Dielektrizitätsfunktion (3.38) aus dem Skript erhalten.

   Berechne und skizziere den Real- und den Imaginärteil von ε_{osc}. Verwende die Notation $\omega_p^2 = 4\pi e^2 n/m$. Wie verhält sich der Realteil für $\omega \ll \omega_0$ und für $\omega \gg \omega_0$?

3. In einem Metall tragen nicht nur die freien Elektronen zur Suszeptibilität bei, sondern es gibt auch verschiedene Beiträge von der Form (2), die von gebundenen Ladungsträgern stammen. Wir wollen uns jetzt hier wieder auf die freien Ladungsträger konzentrieren, d.h. wir setzen $\omega_0 = 0$. Den Beitrag der gebundenen Elektronen nehmen wir als konstant an und nennen ihn χ_∞. Beachte, dass wir $\chi_\infty = 0$ wählen können, falls die Plasmafrequenz der freien Elektronen viel grösser ist als ein typisches ω_0 der gebundenen Ladungsträger. Zeige, dass wir in diesem Fall den folgenden Ausdruck für die Dielektrizitätsfunktion erhalten

$$\varepsilon = \varepsilon_{\text{r}} + \varepsilon_{\text{i}} = 1 + 4\pi\chi_\infty - \frac{\omega_p^2\tau^2}{1+\omega^2\tau^2} + i\frac{\omega_p^2\tau/\omega}{1+\omega^2\tau^2}, \tag{3}$$

   wobei ω_p die Plasma-Frequenz der freien Ladungsträger bezeichnet und wir haben γ durch die Kollisionszeit $\tau = 1/\gamma$ ersetzt.

4. Die Reflektivität an der Grenzfläche zum Metall ist durch folgende Formel gegeben

$$R = \frac{(n-1)^2 + k^2}{(n+1)^2 + k^2}, \tag{4}$$

   wobei n und k durch

$$N(\omega) = \sqrt{\epsilon(\omega)} \qquad N(\omega) = n(\omega) + ik(\omega) \tag{5}$$

   gegeben sind. Zeichne die Reflektivität als Funktion ω/ω_p für $\chi_\infty = 0$ und $4\pi\chi_\infty = 10$ auf. Zeichne jeweils die Kurven mit $\omega_p\tau = \infty$, $\omega_p\tau = 40$ und $\omega_p\tau = 2$.

5. Betrachte die experimentellen Daten in Abbildung 1. Berechne aus den angegebenen Ladungsträgerdichten die Plasmafrequenz in eV und in μm. Vergleiche die Kurven mit den vorher gezeichneten Kurven und diskutiere sie.

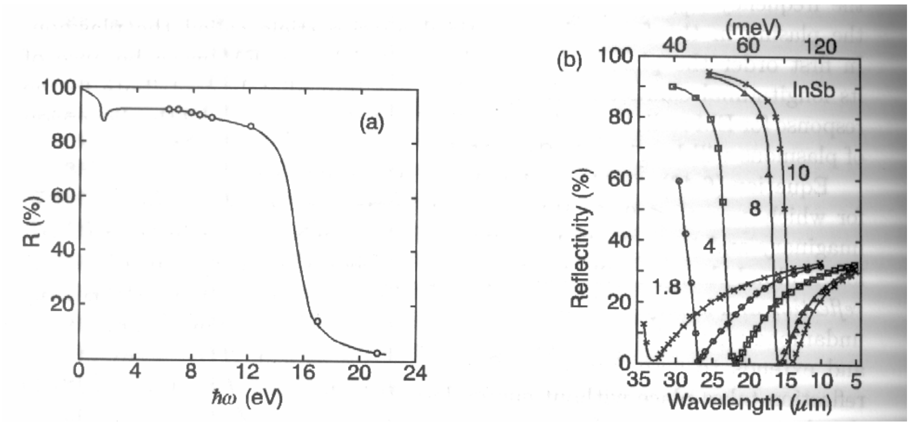

Abbildung 1: Plasma Reflektion für Aluminium (a), und für stark dottiertes InSb (b) . Die Ladungsträgerkonzentration für Al beträgt $n = 18 \times 10^{22}\mathrm{cm}^{-3}$, die Ladungsträgerkonzentration für InSb ist in Einheiten von 10^{18} cm^{-3} in der Figur angegeben. Das Bild wurde dem Buch *Solid-State Spectroscopy* von H. Kuzmany entnommen.