Aufgabe 12.1 Rayleigh und Thomson Streuung

Im Skript wurde die Kramers-Heisenberg Formel

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = r_0^2 \frac{\omega_{k'}}{\omega_k} \left| \delta_{ab}\, \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}}^{\lambda} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}'}^{\lambda'*} - \frac{1}{m} \sum_{\nu} \left[\frac{\langle b|\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}'}^{\lambda'*} \cdot \mathbf{p}|\nu\rangle\langle\nu|\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}}^{\lambda} \cdot \mathbf{p}|a\rangle}{E_\nu - E_a - \hbar\omega_k} + \frac{\langle b|\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}}^{\lambda} \cdot \mathbf{p}|\nu\rangle\langle\nu|\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}'}^{\lambda'*} \cdot \mathbf{p}|a\rangle}{E_\nu - E_a + \hbar\omega_{k'}} \right] \right|^2$$

für den differentielle Wirkungsquerschnitt der Streuung von Licht an einem Atom hergeleitet. Dabei ist $r_0 = e^2/mc^2$ der klassische Elektronenradius, m die Masse des Elektrons, $|\nu\rangle$ die Elektronenzustände zur Energie E_ν. Das einfallende Photon wird beschrieben durch die Energie $\hbar\omega_k = \hbar ck$, den Impuls $\hbar\mathbf{k}$ und die Polarisation $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}}^{\lambda}$; das auslaufende Photon mit den entsprechenden gestrichenen Symbolen. Zudem gilt die Energieerhaltung $\hbar\omega_{k'} + E_b = \hbar\omega_k + E_a$. Folgende Grenzfälle sind abzuleiten:

i) *Thomson-Streuung* (elastische Lichtstreuung hochenergetischen Photonen)
Elastische Lichtstreuung bedeutet dass der Anfangs- und Endzustand des Atoms derselbe ist ($a = b$). Zeige

$$\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{\text{Thomson}} = r_0^2 \left| \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}}^{\lambda} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}'}^{\lambda'*} \right|^2,$$

unter der Annahme, dass $\hbar\omega_k \gg E_\nu - E_a$.

ii) *Rayleigh-Streuung* (elastische Lichtstreuung niederenergetischer Photonen)
Die Annahmen sind jetzt $a = b$ und $\hbar\omega_k \ll E_\nu - E_a = \hbar\omega_{\nu a}$. Zeige:

$$\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{\text{Rayleigh}} = \left(\frac{r_0}{m\hbar}\right)^2 \omega_k^4 \left| \sum_{\nu} \frac{\langle a|\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}'}^{\lambda'*} \cdot \mathbf{r}|\nu\rangle\langle\nu|\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}}^{\lambda} \cdot \mathbf{r}|a\rangle + \langle a|\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}}^{\lambda} \cdot \mathbf{r}|\nu\rangle\langle\nu|\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}'}^{\lambda'*} \cdot \mathbf{r}|a\rangle}{\hbar\omega_{\nu a}} \right|^2.$$

Aufgabe 12.2 Wirkungsquerschnitt für resonante Photonenenabsorption

Wir betrachten ein Atom mit Grundzustand $|g\rangle$ und angeregtem Zustand $|e\rangle$ (wir nehmen an, dass der Dipolübergang von g nach e für Photonen mit der Polarisation λ erlaubt ist; z.B. $|g\rangle = |1\mathrm{s}\rangle$ und $|e\rangle = |2\mathrm{p}\rangle$). Wir wollen den Wirkungsquerschnitt für resonante Photonen mit $\hbar\omega \approx E_e - E_a$ berechnen.

i) Das angeregte Niveau $|e\rangle$ wird wegen der Kopplung zum elektromagnetischen Feld verbreitert. Zeige, dass die spontane Emissionsrate durch

$$\Gamma = \frac{2}{3}\alpha\omega \frac{(\hbar\omega)^2}{mc^2 E_R} \left| \frac{\langle e|\mathbf{r}|g\rangle}{a_B} \right|^2$$

gegeben ist, wobei die Feinstrukturkonstante $\alpha = e^2/\hbar c = 1/137$, die Rydberg Energie $E_R = \hbar/2ma_B^2 \approx 13.6\,\mathrm{eV}$ und der Bohrsche Radius $a_B = \hbar^2/me^2 \approx 0.5\,\text{Å}$.
Tipp: Benutze Gl. (18.47) aus dem Skript.

ii) Wir besetzen die Mode $(\mathbf{k}, \lambda)$ mit $n_{\mathbf{k},\lambda} = n$ Photonen, $\hbar ck \approx E_e - E_g$. Zeige, dass die Übergangsamplitude für die Absorption eines Photons in der Zeit $[t_0, t]$ gegeben ist durch

$$A_{g\to e}(t) = \left(\frac{2\pi\hbar n}{\omega V}\right)^{1/2} \frac{e}{m} \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}}^{\lambda} \cdot \langle e|e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\boldsymbol{\nabla}|g\rangle \int_{t_0}^{t} dt' e^{-i(E_e-E_g-\hbar\omega)t'/\hbar-\Gamma t'/\hbar},$$

bis auf einen irrelevanten Phasenfaktor.
Tipp: Folge der Herleitung der Gl. (18.27) im Skript. Die Verbreiterung kann man durch eine imaginäre Energie $\tilde{E}_b = E_b - i\Gamma$ beschreiben.

iii) Berechne die Absorptionsrate

$$W^{\text{abs}} = \frac{d}{dt}|A_{g\to e}(t)|^2 = 4\pi\alpha\hbar\omega c\frac{n}{V}|\langle e|\mathbf{r}|g\rangle|^2 \frac{\Gamma}{(E_e - E_g - \hbar\omega)^2 + \Gamma^2}$$

$(t_0 \to -\infty, t \to \infty)$ in der Dipolnäherung, $\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}) = 1$.

iv) Zeige, dass der Photonenfluss j gegeben ist durch $j = nc/V$.

v) Berechne den Absorptions-Wirkungsquerschnitt $\sigma^{\text{abs}} = W^{\text{abs}}/j$ für resonante Photonen. Was ist die Längenskala?

F.H.