Quantenmechanik II
Serie 5

Aufgabe 5.1 Bosonische Atome in einer Parabelfalle

Betrachte N bosonische Atome in einem externen Potential der Form

$$V_{ext}(\vec{r}) = \frac{m\omega^2}{2}\left(x^2 + y^2 + z^2\right), \tag{1}$$

wobei ω die Fallenfrequenz und m die Masse eines Bosons sind. Bei sehr tiefen Temperaturen im voll kondensierten Zustand besetzen alle Atome den gleichen Ein-Teilchen Zustand $\phi(\vec{r})$, woraus sich die N-Teilchen Wellenfunktion in der Hartree-Näherung

$$\Psi(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N) = \prod_{i=1}^{N} \phi(\vec{r}_i) \tag{2}$$

mit der Normierung $\int d\vec{r}\,|\phi(\vec{r})|^2 = 1$ ergibt. Bei tiefen Temperaturen kommt es zwischen den Atomen nur zu s-Wellen Sreuung, daher kann die effektive Wechselwirkung zwischen zwei Atomen durch das Potential $V_{int}(\vec{r_i}, \vec{r_j}) = U_0\delta(\vec{r_i} - \vec{r_j})$ dargestellt werden (siehe QMI Übung 12.2 und Skript 12.75). Hierbei ist $U_0 = \frac{4\pi\hbar a}{m}$ mit der Streulänge a.

a) Stelle den Hamilton-Operator des obigen Systems auf und berechne die Energie E des Systems im Zustand (2).

b) Führe die Wellenfunktion des kondensierten Zustands $\psi(\vec{r}) = \sqrt{N}\phi(\vec{r})$ ein und leite einen Ausdruck für die Energie E aus Teilaufgabe a) in Abhängigkeit von $\psi(\vec{r})$ her. Vernachlässige dabei Terme $1/N$.

c) Um nun die optimale Form der Wellenfunktion $\psi(\vec{r})$ zu finden, minimiere die Energie aus Teilaufgabe b) bezüglich $\psi(\vec{r})$ und $\psi^*(\vec{r})$ mit der Nebenbedingung konstanter Teilchenzahl $N = \int d\vec{r}\,|\psi(\vec{r})|^2$. Leite daraus die Gross-Pitaevskii-Gleichung

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2\psi(\vec{r}) + V_{ext}(\vec{r})\,\psi(\vec{r}) + U_0|\psi(\vec{r})|^2\psi(\vec{r}) = \mu\psi(\vec{r}) \tag{3}$$

her.
Tipp: Benutze die Gleichung $\delta E - \mu\delta N = 0$ mit dem chemischen Potential μ als Lagrange-Multiplikator, der die Konstanz der Teilchenzahl garantiert. Die Variationen von $\psi(\vec{r})$ und $\psi^*(\vec{r})$ können dann als unabhängig angesehen werden. Dieses Vorgehen ist äquivalent zur Minimierung des Ausdrucks $E - \mu N$ bei festem μ bezüglich $\psi(\vec{r})$ oder $\psi^*(\vec{r})$.

d) In der Thomas-Fermi Approximation kann der kinetische Term in Gleichung (3) vernachlässigt werden. Finde in dieser Näherung einen Ausdruck für die Teilchenzahldichte $n_B(\vec{r}) = |\psi(\vec{r})|^2$ mit dem externen Potential aus Gleichung (1). Skizziere das Ergebnis.

e) Finde aus dem in Teilaufgabe d) berechneten $n_B(\vec{r})$ eine Bedingung für die örtliche Begrenzung der Wolke und leite daraus einen Ausdruck für ihre Ausdehnung R her. Leite ferner einen Zusammenhang zwischen der Teilchenzahl N und dem chemischen Potential μ her. Man erhält so einen Ausdruck für μ, der nur von den experimentell bestimmbaren Parametern N und R sowie der Streulänge a abhängt.
Eine Anwendung einer solchen Parabelfalle ist die Bose-Einstein-Kondensation, siehe dazu M. H. Anderson *et al.*, Science, **269**, 198 (1995).

b.w.

Aufgabe 5.2 Fermionische Atome in einer Parabelfalle

Betrachte nun N *spinpolarisierte* fermionische Atome in dem externen Potential (1).

a) Leite ausgehend von Gleichung (13.19) im Skript

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2 + V_{ext} + V_{WW}\right]\phi_{\alpha_i}(\vec{r}) = \mathcal{E}_{\alpha_i}\phi_{\alpha_i}(\vec{r}) \tag{4}$$

einen Ausdruck für die Teilchenzahldichte $n_F(\vec{r})$ her. Im Falle von Fermionen kann der kinetische Ausdruck nicht mehr vernachlässigt werden (Fermi-Druck), bei tiefen Temperaturen kann jedoch eine lokale Teilchenzahldichte $n_F(\vec{r}) = \frac{k_F^3}{6\pi^2}$ eingeführt werden (Thomas-Fermi Approximation), des Weiteren kann in unserem Fall der Wechselwirkungsterm in Gleichung (4) vernachlässigt werden (warum?). Skizziere das Ergebnis.

b) Finde wie in Aufgabe 5.1e) eine Bedingung für die Begrenzung der Wolke und leite daraus einen Ausdruck für ihre örtliche Ausdehnung R her. Vergleiche das Verhalten von n_B und n_F für $r \to 0$ und $r \to R$.

C.K.