Aufgabe 4.1 Spin-Bahn Kopplung und Zeeman Effekt

Für ein nichtrelativistisches Elektron in einem radialsymmetrischen Potential $V(r)$ hängt die Energie E_{nl} der Zustände $|nlm\sigma\rangle$ weder von der magnetischen Quantenzahl m und noch vom Spin σ ab. In dieser Aufgabe betrachten wir, wie diese Entartung durch die Anwesenheit eines homogenen Magnetfeldes $\vec{H}$ parallel zur z-Achse und durch den relativistischen Effekt der Spin-Bahn Kopplung in erster Ordnung Störungstheorie aufgehoben wird. Der Hamilton Operator der Störung H' ist im $2(2l{+}1)$ dimensionalen Hilbertraum $\mathcal{H} = \mathrm{span}(|nlm\sigma\rangle, m = -l \ldots l, \sigma = \pm 1/2)$ durch

$$H' = \kappa\, \vec{L} \cdot \vec{S} + \frac{eH_z}{2mc}(L_z + 2S_z).$$

gegeben, wobei $\kappa = \frac{1}{2m^2c^2}\langle \frac{1}{r}\frac{dV}{dr}\rangle_{nl}$.

a) Berechne die Aufspaltung in erster Ordnung Störungstheorie, falls H_z so gross ist, dass der zweite Term dominiert (Paschen-Back Effekt). Wie gross muss der Betrag des magnetischen Feldes H_z für den Fall des Wasserstoffatoms mindestens sein, damit diese Näherung gerechtfertigt ist?

b) Berechne nun in erster Ordnung Störungstheorie die Aufspaltung der Energie durch H' im Hilbertraum $\mathcal{H}$ für beide Terme gleichzeitig. Dazu muss die $2(2l + 1) \times 2(2l + 1)$ Matrix $\langle nlm\sigma|H'|nlm'\sigma'\rangle$ diagonalisiert werden. Da $[J_z, H'] = 0$ gilt, ist diese Matrix schon Blockdiagonal.

c) Vergleiche den Fall $x := \mu_{\mathrm{B}} H_z/(\kappa\hbar^2) = 0$ mit (11.108) und zeige, dass wir für $x \ll 1$ und gegebenes j die Zeeman-Aufspaltung

$$\Delta E_{nljm_J} = g_{lj}\, \mu_{\mathrm{B}} H_z m_J \quad m_J = -j, \ldots, j \tag{1}$$

mit $g_{l,l+1/2} = \frac{2+2l}{1+2l}$ und $g_{l,l-1/2} = \frac{2l}{1+2l}$ erhalten.

Skizziere die in (b) berechneten Eigenwerte für $l = 1$ als Funktion von x.

Aufgabe 4.2 Hartree-Näherung

Bestimme approximativ die Wellenfunktion und die Energie für den (1s)(2p)-Zustand von Helium in der Hartree-Näherung mit Hilfe des Variationsprinzips von Rayleigh-Ritz, wobei als Variationsparameter die effektiven Kernladungen für den (1s)-Zustand, $Z^{\mathrm{eff}}_{1s} \equiv \alpha$, und für den (2p)-Zustand, $Z^{\mathrm{eff}}_{2p} \equiv \beta$, genommen werden.

Vergleiche das Resultat mit der gemessenen Ionisierungsenergie für den Singulett- und Triplett-Zustand ($E^{2p}_{\mathrm{S}} = 0.247\,\mathrm{Ry}$, $E^{2p}_{\mathrm{T}} = 0.266\,\mathrm{Ry}$).

Aufgabe 4.3 Identische Teilchen

Der Hamiltonoperator von N Teilchen sei gegeben durch

$$H = H_0 + H_{\mathrm{WW}} = \sum_{j=1}^{N} \frac{p_j^2}{2m} + U \sum_{i<j} \delta\left(r_i - r_j\right) \tag{2}$$

Berechne in erster Ordnung Störungstheorie die Energie des Grundzustandes für den Fall, dass die Teilchen

a) spinlose Bosonen

b) Spin 1/2 Fermionen

sind. Man gebe ferner den Druck des Grundzustandes