

Aufgabe 3.1 Harmonisch gekoppelte Anyonen

Wir betrachten zwei harmonisch gekoppelte identische Teilchen in 2D. Die Schwerpunktbewegung wird vernachlässigt und die Relativbewegung wird durch die Schrödingergleichung

$$E\Psi(r, \phi) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) + \frac{m\omega^2}{2} r^2 \right] \Psi(r, \phi) \quad (1)$$

beschrieben.

- a) Man finde die irreduziblen Darstellungen der Gruppe $SO(2)$ auf dem zu H gehörenden Hilbertraum. Was verändert sich, wenn wir die Wirkung der Drehgruppe $SO(2)$ nur noch bis auf ein Phase bestimmen wollen? Was war der entsprechende Effekt in drei Dimensionen wo $SO(3)$ die relevante Gruppe war?
- b) Für die Eigenfunktionen des Drehoperators gilt offensichtlich, dass

$$\Psi_l(r, \phi + \theta) = e^{il\theta} \Psi_l(r, \phi). \quad (2)$$

Welche Werte von l sind für Bosonen (Fermionen) möglich, wenn man annimmt, dass die Spinwellenfunktion χ gerade ist unter Vertauschung der Teilchen? Man gebe das Spektrum von H an.

- c) In der Aufgabe a) haben wir gelernt, dass der Spin in 2D nicht wie in 3D $2l+1$ -dimensionalen Darstellung entspricht und nur quantisierte Werte annehmen kann, sondern einer 1-dimensionalen Darstellung entspricht und dass er beliebige Werte $\nu \in \mathbb{R}$ annehmen kann. Für Bosonen wollten wir, dass die Wellenfunktion unter Austausch der Teilchen in sich übergeht. Für Fermionen war die Forderung, dass die Wellenfunktion ein Minuszeichen akquiriert. Es ist daher natürlich für Anyonen ($\nu \notin \mathbb{Z}$) zu fordern

$$\Psi_\nu(r, \phi + \pi) = e^{i\nu\pi} \Psi_\nu(r, \phi). \quad (3)$$

Erzeugt diese Funktion auch eine irreduzible Darstellung von $SO(2)$? Wie verhält sich diese Lösung bezüglich der Gruppe S_2 .

- d) Um die Randbedingung (3) zu vereinfachen, wollen wir folgende Eichtransformation ausführen

$$\tilde{\Psi}_\nu(r, \phi) = e^{-i\nu\phi} \Psi_\nu(r, \phi). \quad (4)$$

Wie muss man die Schrödingergleichung (1) anpassen um die Eichtransformation zu kompensieren? Wie sieht das Spektrum als Funktion von ν aus?

Aufgabe 3.2 Elektronische Zustände

Die totale Wellenfunktion eines Systems von drei e^- muss antisymmetrisch sein unter Vertauschung der Teilchen. Die Antisymmetrie kann nun im Bahn- (φ) oder im Spinanteil (χ) der Wellenfunktion liegen. Richtig kompliziert wird es, wenn weder φ noch χ sondern nur die Gesamtwellenfunktion eine definierte Symmetrie hat. Dies wollen wir am Beispiel der $(2p)^3$ Elektronen von Stickstoff ausführen.

- a) Klassifiziere alle erlaubten Zustände eines Systems, das aus drei p-Elektronen in einem sphärisch-symmetrischen Potential besteht. Verwende dazu Young-Diagramme.
- b*) Eine erlaubte Konfiguration mit gemischter Symmetrie ist durch

$$l_{\text{tot}} = 2 \quad \text{und} \quad s_{\text{tot}} = \frac{1}{2} \quad (5)$$

gegeben. Finde nun die Gesamtwellenfunktion mit $m_{l_{\text{tot}}} = 2$, $m_{s_{\text{tot}}} = 1/2$ und zeichne die Winkelabhängigkeit der Wahrscheinlichkeit *ein* Teilchen mit Spin \uparrow bzw. mit Spin \downarrow zu finden. Wie sieht es aus, wenn wir keine Spinauflösung machen?

S.H.