ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

# Kontinuumsmechanik
# Serie 11

SS 05
Prof. M. Sigrist

---

## Aufgabe 11.1 Asymmetrisches Zhoukovski-Profil

Im Skript wurde das symmetrische Zhoukovski-Profil betrachtet, welches durch die Zhoukovski-Transformation eines Kreises durch die angehende Hinterkante (singulärer Punkt) mit um $\delta \in \mathbb{R}$ verschobenen Mittelpunkt entsteht. In dieser Aufgabe sollen nun *asymmetrische* Profile untersucht werden.

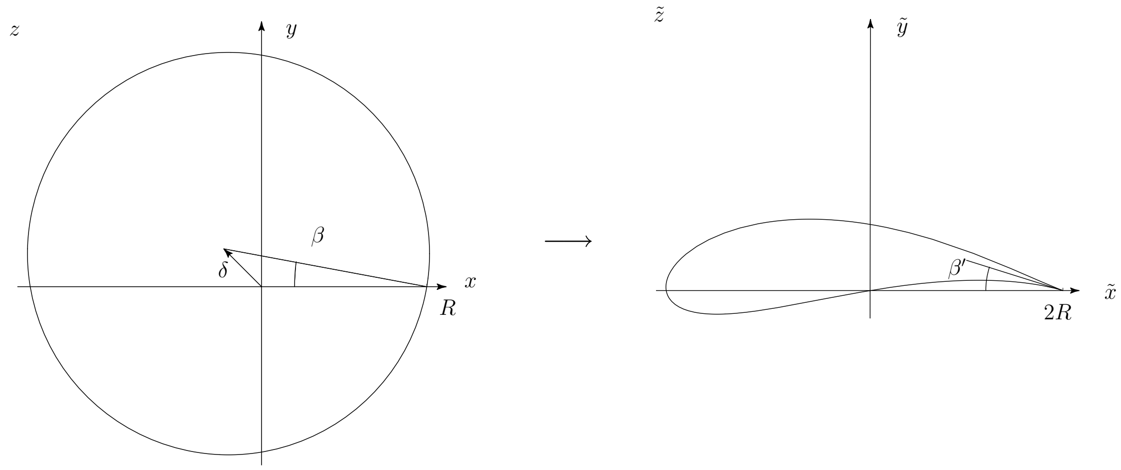
a) Betrachte das Bild eines Kreises durch den singulären Punkt $z_1 = R$ auf der rellen Achse mit komplexem Verschiebungsvektor $\delta = \delta_x + i\delta_y \in \mathbb{C}$ unter der Zhoukovski-Transformation

$$\tilde{z} = z + \frac{R^2}{z}.$$

Untersuche zuerst rein imaginäre Verschiebungsvektoren $\delta = i\delta_y$ und parametrisiere das Profil mittels Polarkoordinaten, $z = re^{i\theta}$. Finde die entsprechende Parametrisierung für $\tilde{z}$ aus der Transformation. Zeige, dass das Bild des verschobenen Kreises für rein imaginäres $\delta$ dargestellt werden kann durch

$$\tilde{x}^2 + (\tilde{y} + 2R\cot 2\beta)^2 = (2R\csc 2\beta)^2, \qquad \cos\beta = R/\rho,\ \rho = |R - \delta|.$$

Welches Verhältnis besteht zwischen den Winkeln $\beta$ und $\beta'$?




b) Zeige, dass die Kutta-Bedingung $v_\parallel(0) < \infty$ ($v_\parallel$: Tangentialgeschwindigkeit) folgende Zirkulation verlangt:

$$\Gamma = -4\pi v^\infty |R - \delta| \sin(\alpha + \beta),$$

mit $\delta = \delta_x + i\delta_y \in \mathbb{C}$. Untersuche dazu das komplexe Geschwindigkeitspotential $\Phi(z)$, welches sich analog zu Gl. 9.62 im Skript (symmetrischer Fall) mittels der Parametrisierung aus a) herleiten lässt.

c) Welchen Einfluss hat eine asymmetrische Profilierung auf den Auftrieb? Warum kann ein solches Profil vorteilhaft sein?

### Aufgabe 11.2 Vortex - Diffusion

a) Zeige, dass in in einem inkompressiblen viskosen Fluidum die zeitliche Entwicklung der Vortizität $\vec{\zeta} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{v}$ durch

$$\frac{D\vec{\zeta}}{Dt} \equiv \frac{\partial \vec{\zeta}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{\zeta} = (\vec{\zeta} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} + \nu \nabla^2 \vec{\zeta}$$

beschrieben wird, wobei $\nu = \frac{\eta}{\rho}$.

b) Betrachte den Fall einer axialsymmetrischen Strömung $\vec{v}(\vec{r}, t) = v_\varphi(r, t)\hat{\varphi}$ (siehe Serie 8, Aufgabe 2). Löse die Gleichung für die zeitliche Entwicklung aus a) unter Verwendung der Anfangsbedingung $\zeta(\vec{r}, 0) = \zeta_0 \delta(\vec{r})$.
Tipp: Verwende Fouriertransformation.

c) Verwende nun als Ausgangskonfiguration den Wirbel mit endlicher Ausdehnung aus Serie 8, Aufg. 2b),

$$\zeta(\vec{r}, t) = \zeta_0 \frac{e^{-\frac{r^2}{2a^2}}}{2\pi a^2}.$$