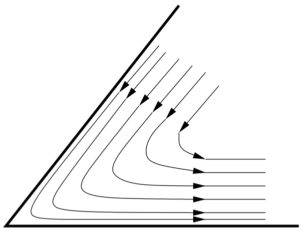
ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Kontinuumsmechanik
Serie 10

SS 05
Prof. M. Sigrist

Aufgabe 10.1 Fluss an einem Winkel zwischen zwei Wänden

Bestimme die zweidimensionale Potentialströmung an einem Winkel, der durch zwei sich schneidende Ebenen gegeben ist. Zeige, dass das Geschwindigkeitsfeld an der Kante divergiert, falls der eingeschlossene Winkel grösser ist als π und dass es verschwindet, falls der Winkel kleiner ist als π.



Tipp: Betrachte das komplexe Potential

$$\Phi = -Az^n, \quad (n \geq \frac{1}{2})$$

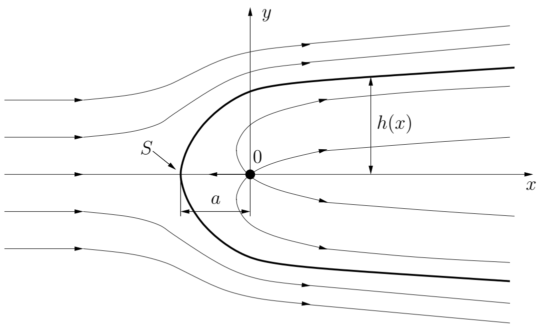
wobei A eine reelle Konstante ist.

Aufgabe 10.2 Fluss um einen Halbkörper

Ein interessanter zweidimensionaler Fluss ergibt sich aus der Superposition einer Quelle mit einem uniformen Strom,

$$\Phi = -Uz - \frac{m}{2\pi} \ln z.$$

Dieser Fluss hat einen Stagnationspunkt mit den Polarkoordinaten (a, π).



a) Wie gross ist a?

b) Wie lautet die Gleichung für die Stromlinie, die durch den Stagnationspunkt verläuft?

c) Diese Stromlinie definiert einen unendlichen Körper, einen so genannten Halbkörper. Wie gross ist die maximale Breite $2h_{\text{max}}$ dieses Körpers?

d) Die lokale Druckverteilung finden wir mit Hilfe der Bernoulli Gleichung

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 = p_\infty + \frac{1}{2}\rho U^2.$$

Berechne und skizziere den dimensionslosen Druckkoeffizienten

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho U^2} = 1 - \frac{v^2}{U^2}$$

auf der Oberfläche des Körpers als Funktion des Polarwinkels θ.

Aufgabe 10.3 Solitonen (freiwillig)

1834 beobachtete Scott Russell in einem Kanal einen einzelnen Wellenbuckel, der sich ohne seine Form zu ändern und ohne langsamer zu werden ausbreitete. Er begann, solche Wellenbuckel experimentell zu untersuchen und fand bei diesen Experimenten unter anderem, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit mit zunehmender Amplitude ansteigt.
1895 gelang es Korteweg und de Vries das Phänomen zu erklären mit Hilfe der nichtlinearen Differentialgleichung (KdV-Gleichung)

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + c_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{3}{2} c_0 \frac{\eta}{h} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{1}{6} c_0 h^2 \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0.$$

Hier ist $c_0 = \sqrt{gh}$.

a) Zeige, dass falls man in der KdV- Gleichung den nichtlinearen Term weglässt erhält man eine Dispersion, die der Entwicklung der Formel (8.23) im Skript für ω_k bis zur Ordnung $(hk)^3$ entspricht.

b) Der nichtlineare Term berücksichtigt den Effekt von endlichen Amplituden. Dieser Term wirkt dem dispersiven Term entgegen, welcher das Zerfliessen eines Wellenpaketes zur Folge hätte. In der Tat hat diese Gleichung Lösungen der Form $\eta = f(x - ct)$ wie ein nichtdispersives Medium. Zeige, dass der Ansatz

$$\eta = a \operatorname{sech}^2 \left[\sqrt{\frac{3a}{4h^3}} (x - ct) \right]$$

eine Lösung der KdV-Gleichung liefert, wobei die Fortpflanzungsgeschwindigkeit

$$c = c_0 \left(1 + \frac{a}{2h} \right)$$

mit zunehmender Amplitude wächst, wie schon Russel festgestellt hatte. Solche solitäre Wellen nennt man Solitonen. Solitonen spielen heute in verschiedenen Bereichen der Physik eine wichtige Rolle.