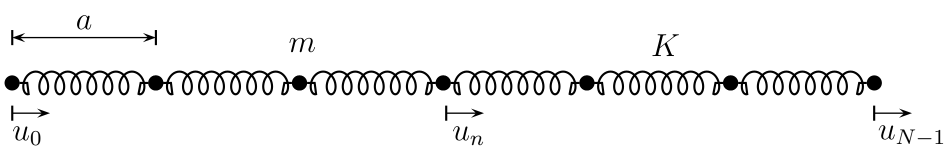
Kontinuumsmechanik
Serie 6

Aufgabe 6.1 Longitudinale Schallgeschwindigkeit einer monoatomischen Kette

Die Schallgeschwindigkeit eines elastischen Mediums wird normalerweise als von der Wellenlänge λ unabhängige Grösse betrachtet. Diese Näherung ist jedoch nur gültig wenn λ viel grösser ist als die Gitterkonstante a ($\rightarrow$ Kontinuumslimes). Um das zu zeigen, betrachten wir den Fall der longitudinalen Schallgeschwindigkeit in einer monoatomischen Kette. Leite die Bewegungsgleichung der longitudinalen Auslenkung des n-ten Massepunktes der folgenden Kette her:



Wir nehmen an, dass die Kette periodisch ist, d.h $u_N = u_0$. Benutze den Ansatz $u_n = A \exp\big(i(k\,na - \omega t)\big)$ als Lösung der Bewegungsgleichung. Wieviele verschiedene und erlaubte k-Werte existieren, die zu verschiedenen Lösungen führen? Bestimme die Frequenz ω als Funktion des Wellenvektors k, und zeige, dass für $\lambda = 2\pi/k \gg a$ die longitudinale Geschwindigkeit $c_l = a\sqrt{K/m}$ konstant ist.

Aufgabe 6.2 Die Zähigkeit fester Körper

Bei der Untersuchung der Bewegung in festen Körpern wurde bisher vorausgesetzt, dass der Deformationsprozess reversibel ist. In Wirklichkeit ist dies nicht der Fall; der Körper befindet sich nicht zu jedem Zeitpunkt im thermischen Gleichgewicht. Das führt zur Irreversibilität der Bewegung, unter anderem in der Dissipation der mechanische Energie in Wärme. Phänomenologisch wird die Dissipation als eine Reibungskraft übersetzt, wie sie z.B. auch bei der Behandlung realer Fluida berücksichtigt werden muss. In Kap. 6.3 der Vorlesung wird dazu ein Reibungsspannungstensor eingeführt, welcher von den Gradienten der Geschwindigkeit $\vec{v} \equiv \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}$ abhängt:

$$R_{ij} = \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \eta' \delta_{ij} \vec{\nabla} \cdot \vec{v}.$$

Da hier longitudinale Wellen betrachtet werden, kann der Scherterm weggelassen werden, d.h. man muss nur den Volumenterm $\propto \vec{\nabla} \cdot \vec{v}$ mit nicht verschwindender Spur berücksichtigen, wobei die Spur gegeben ist durch

$$R_{kk} = (2\eta + 3\eta')\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = -\zeta \vec{\nabla} \cdot \vec{v}.$$

Die Wellengleichung für longitudinale Wellen lautet jetzt

$$\frac{1}{c_l^2} \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} - \gamma \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{u} \right) - \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{u} \right) = 0, \tag{1}$$

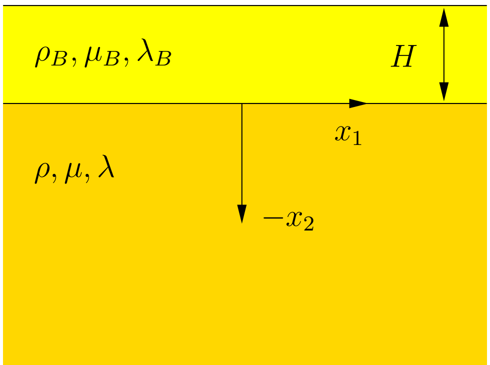
mit $\gamma = \zeta/(2\mu + \lambda)$.

Eine monochromatische Schallquelle rege die Fläche einer Mauer der Dicke L mit der Auslenkung $u_x(x=0,t) = A\cos(\omega t)$ an. Löse die obige Gleichung und bestimme die Leistung, welche in die Mauer dissipiert wird (d.h. die absorbierte Leistung P_{ab}):

$$\frac{P_{ab}}{P_{Quelle}} = \frac{\langle u_x^2(0,t)\rangle_t - \langle u_x^2(L,t)\rangle_t}{\langle u_x^2(0,t)\rangle_t}.$$

Aufgabe 6.3 Love-Wellen

Love-Wellen, deren Schwingungsrichtung parallel zur Oberfläche ist, sind nur möglich, wenn das Medium, in dem sie sich ausbreiten (z. B. die Erde), aus mindestens zwei Schichten besteht. Betrachte dazu folgendes einfache Modell der Erdkruste:



Eine isotrope Schicht mit Lamé-Koeffizienten μ^B, λ^B, Dichte ρ_B und der Dicke H bilde die Oberfläche. Darunterliegend sei eine isotrope, unendlich dicke Schicht mit μ, λ und ρ. Die Trennfläche zwischen den Schichten verlaufe parallel zur x_1-x_3-Ebene. Setze als Love-Welle eine in x_3-Richtung polarisierte und in x_1-Richtung propagierende Welle der Form

$$u_3^{(B)} = A^{(B)}(x_2)e^{ik^{(B)}(x_1-ct)} \tag{2}$$

an (in beiden Medien).

Was sind die Randbedingungen bei $x_2 = H$, $x_2 = 0$ und $x_2 \to -\infty$? Berechne mit Hilfe der Wellengleichung (Skript (4.6)) mögliche Lösungen für $A(x_2)$ Und $A^B(x_2)$. Welche Bedingung muss die Schallgeschwindigkeit der Oberflächenschicht erfüllen? Wie lautet die Schallgeschwindigkeit der Love-Welle in den Grenzfällen $kH \gg 1$ und $kH \ll 1$?