Kontinuumsmechanik
Serie 4

Aufgabe 4.1 Punkt-Defekt in isotropem Medium

Ein Punkt-Defekt in einem elastischen Medium ist gegeben durch ein Deformationsfeld mit

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 4\pi c \delta(\vec{r}), \tag{1}$$

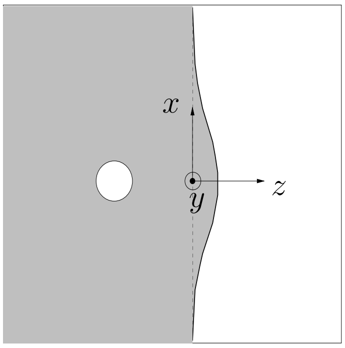
wobei c die Stärke der Deformation charakterisiert.

a) Bestimme die Deformation $\vec{u}$ für ein homogenes isotropes Medium als Lösung von (1). Berechne daraus Deformations- und Spannungstensor.

b) Bestimme die Volumenkraftdichte $\vec{F}$ eines solchen Punktdefekts, sowie die durch ihn verursachte Volumenänderung.

c) Berechne die Wechselwirkungsenergie zweier Punktdefekte bei $\vec{r}_1$ bzw. $\vec{r}_2$. Wie wirkt die Kraft der Wechselwirkung (attraktiv, repulsiv)? (Vgl. Serie 1, Aufgabe 2).

Aufgabe 4.2 Punkt-Defekt in elastischem Halbraum



Gegeben sei ein elastischer Halbraum ($z < 0$). Die Oberfläche des Halbraums sei frei, d.h. es gilt dort $\sigma_{ij} n_j = 0$, mit der Oberflächennormalen $\vec{n} = \vec{e}_z$.
Bestimme die Deformationsenergie eines Punktdefekts. Wie wird sich dieser Defekt im Medium verhalten? Wie sieht hier die Wechselwirkung zwischen zwei Derformationen aus?
Tipp: Verwende die Randbedingung auf der Oberfläche zur Herleitung der Deformationsenergie einer *Spiegeldeformation* (Vgl. Spiegelladungsprinzip aus der Elektrostatik).

Aufgabe 4.3 Punkt-Defekt in anisotropem Medium

In einem nahezu isotropen elastischen Medium mit einer kleinen Deformation von kubischer Symmetrie können die Elastizitätsmodule geschrieben werden als $c_{ij} = c^0_{ij} + c'_{ij}$, wobei die c^0_{ij} effektive isotropische Module sind, mit $c^0_{11} = (3c_{11} + 2c_{12} + 4c_{44})/5$, $c^0_{12} = (c_{11} + 4c_{12} - 2c_{44})/5$, $c^0_{44} = (c_{11} - c_{12} + 3c_{44})/5$ und c'_{ij} die anisotrope Korrektur. Ausgehend vom isotropen Fall können Punktdefekt-Deformationen durch Entwicklung und sukzessive Approximation ermittelt werden.

a) Leite die Feldgleichung (2.4) für kubische Symmetrie aus den Variationsgleichungen für die Freie Energie her.

b) Entwickle das Deformationsfeld bis zu erster Ordnung in der Anisotropie, d.h. $u = u^0 + u' + ...$, und bestimme die isotrope Lösung der Feldgleichungen sowie die erste anisotrope Korrektur e' zur Volumenänderung $e \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{u}$.

c) Bestimme die Wechselwirkungsenergie zweier Punktdefekte im kubisch - anisotropen Medium .