Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Kontinuumsmechanik
Serie 2

SS 05
Prof. M. Sigrist

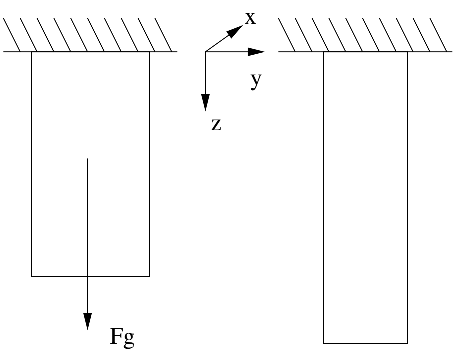
Aufgabe 2.1 Elastizitätsmodul von Kristallen

a) Wieviele Elastizitätsmodule braucht es, um die elastischen Eigenschaften eines hexagonalen Systems zu charakterisieren? Schreibe die freie Energie F als Funktion der nicht verschwindenden Komponenten C_{ijkl} des Tensors der Elastizitätsmodule.

b) Man lege die Koordinatenachsen in die drei Achsen vierter Ordnung des kubischen Kristalls. Es wird nun aus dem Kristall ein Stab mit Längsachse in Richtung des Einheitsvektors $\vec{n}$ ausgeschnitten und mit einer Kraft in seine Längsrichtung belastet. Berechne das Youngsche Modul E in Abhängigkeit von $\vec{n}$.

Aufgabe 2.2 Deformation eines elastischen Stabs im Schwerefeld

Im Skript wird die Deformation eines elastischen Stabs durch eine äussere Kraft $\vec{P} \parallel \hat{z}$ untersucht, wobei eine Oberflächenkraft angenommen wird. Die einzige nichtverschwindende Spannungstensorkomponente ist $\sigma_{zz} = P$.



Vergleiche die resultierende Deformation $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$ mit derjenigen eines aufgehängten elastischen Stabs im Schwerefeld, d.h. unter dem Einfluss der Volumenkraft $\vec{F_G} = \rho g$, mit der homogenen Massendichte ρ. Berechne dazu den entsprechenden Spannungstensor σ_{ij} unter Verwendung der korrekten Gleichgewichts- und Randbedingungen.

Aufgabe 2.3 Gradient, Divergenz, Rotation und Laplace in Zylinderkoordinaten

Zeige, dass der Gradient und der Laplaceoperator, angewandt auf eine Skalarfunktion $\psi(r, \phi, z)$, sowie die Divergenz und die Rotation, angewandt auf eine Vektorfunktion $\vec{v}(r, \phi, z)$ in Zylinderkoordinaten wie folgt geschrieben werden können:

$$
\begin{aligned}
\vec{\nabla}\psi &= \frac{\partial \psi}{\partial r}\vec{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \phi}\vec{e_\phi} + \frac{\partial \psi}{\partial z}\vec{e_z} \\
\triangle\psi &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \\
\vec{\nabla}\cdot\vec{v} &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \\
\vec{\nabla}\times\vec{v} &= \left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \phi} - \frac{\partial v_\phi}{\partial z}\right)\vec{e_r} + \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r}\right)\vec{e_\phi} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(r v_\phi) - \frac{\partial v_r}{\partial \phi}\right)\vec{e_z}
\end{aligned}
$$