Elektrodynamik
Serie 14

Diese Übung ist für unsere zukünftigen Kollegen in der theoretischen Physik gedacht. Sie ist einigermassen schwierig und arbeitsaufwendig, sollte aber unbedingt angepackt werden. Es wird eine Lösungsmethode für gewisse Probleme vorgestellt, die auf den ersten Blick wie schwarze Magie aussieht: *eine* Gleichung mit *zwei* unbekannten Funktionen ist gegeben - und wird gelöst. Wie so oft entpuppt sich die schwarze Magie als Funktionentheorie...

Einführung: Die Wiener-Hopf Methode

Es sei eine Gleichung der Form

$$A(\alpha)\Phi_+(\alpha) + B(\alpha)\Psi_-(\alpha) + C(\alpha) = 0 \tag{1}$$

gegeben, die auf einem Streifen

$$\mathcal{S} \equiv \mathcal{S}_+ \cap \mathcal{S}_- \equiv \{\alpha = \sigma + \mathrm{i}\tau \mid \tau > \tau_-\} \cap \{\alpha = \sigma + \mathrm{i}\tau \mid \tau < \tau_+\} \subset \mathbb{C} \tag{2}$$

gültig sein soll. Es sei natürlich $\tau_+ > \tau_-$. Die Funktionen $A(\alpha), B(\alpha), C(\alpha)$ sind gegeben und auf dem Streifen $\mathcal{S}$ analytisch, zudem seien der Einfachheit halber $A(\alpha), B(\alpha)$ nicht Null auf $\mathcal{S}$. Die Funktionen $\Phi_+(\alpha)$ und $\Psi_-(\alpha)$ sind gesucht, und zwar soll $\Phi_+(\alpha)$ analytisch sein auf $\mathcal{S}_+$ und $\Psi_-(\alpha)$ auf $\mathcal{S}_-$. Zusätzlich brauchen wir gewisse Abfalleigenschaften dieser Funktionen (siehe später). Unter diesen Voraussetzungen ist die Gleichung (1) tatsächlich lösbar! Die Idee ist, (1) in zwei Summanden zu zerlegen, einer davon analytisch auf $\mathcal{S}_+$, einer auf $\mathcal{S}_-$. Das geht, indem wir den Quotienten $A(\alpha)/B(\alpha)$ zerlegen in ein Produkt

$$\frac{A(\alpha)}{B(\alpha)} = K_+(\alpha)K_-(\alpha) \tag{3}$$

wobei wiederum $K_\pm(\alpha)$ analytisch und nicht Null ist auf $\mathcal{S}_\pm$. Teilen wir die Gleichung (1) durch $B(\alpha)K_-(\alpha)$ und zerlegen weiter den dritten Summanden

$$\frac{C(\alpha)}{B(\alpha)K_-(\alpha)} = C_+(\alpha) + C_-(\alpha) \tag{4}$$

so erhalten wir die neue Gleichung

$$K_+(\alpha)\Phi_+(\alpha) + C_+(\alpha) = -\frac{\Psi_-(\alpha)}{K_-(\alpha)} - C_-(\alpha). \tag{5}$$

Da die linke Seite auf $\mathcal{S}_+$ analytisch ist und die rechte auf $\mathcal{S}_-$, können wir eine analytische Funktion auf ganz $\mathbb{C}$ definieren durch

$$J(\alpha) \equiv \begin{cases} K_+(\alpha)\Phi_+(\alpha) + C_+(\alpha) & \tau > \tau_- \\ -\Psi_-(\alpha)/K_-(\alpha) - C_-(\alpha) & \tau < \tau_+ \end{cases}. \tag{6}$$

Die Abfalleigenschaften braucht man jetzt, um im besten aller Fälle zu zeigen, dass $J(\alpha)$ beschränkt ist auf $\mathbb{C}$. Dann folgt aus dem Satz von Liouville, dass $J(\alpha) \equiv 0$ und die ursprüngliche Gleichung (1) ist tatsächlich gelöst:

$$\Phi_+(\alpha) = -\frac{C_+(\alpha)}{K_+(\alpha)} \tag{7}$$

$$\Psi_-(\alpha) = -C_-(\alpha)K_-(\alpha). \tag{8}$$

Diese Lösungsmethode nach Wiener und Hopf ist nicht zuletzt darum genial, weil sie oft funktioniert: die geforderten Abfalleigenschaften an $\Phi_+(\alpha)$ und $\Psi_-(\alpha)$ sind nicht besonders streng, und die Zerlegungen in Produkte und Summen können systematisch gemacht werden. (Theoreme darüber: siehe [1]).

Einführung: Das Sommerfeld-Problem

Wir lösen in dieser Serie das Sommerfeld-Problem (das heisst Beugung an einer Halbebene, siehe [2]) mithilfe der Wiener-Hopf Methode. Ein ebene, elektromagnetische Welle falle auf eine perfekt leitende Halbebene ($z = 0, x \leq 0$). Der Wellenvektor der einfallenden Welle sei in der xz-Ebene, so dass das Problem 2D wird:

$$\boldsymbol{k} = k(\cos\theta, 0, \sin\theta), \qquad k = k_1 + \mathrm{i}k_2, \qquad k_1 > 0,\ k_2 > 0. \tag{9}$$

Der komplexe $\boldsymbol{k}$-Vektor beschreibt Dämpfung, darum die Vorzeichenwahl von Real- und Imaginärteil. Beschränken wir uns zudem auf den skalaren Fall, so lautet die einfallende Welle

$$\Phi_i = \exp(-\mathrm{i}kx\cos\theta - \mathrm{i}kz\sin\theta) \qquad 0 < \theta < \pi \tag{10}$$

und die totale Lösung

$$\Phi_t = \Phi_i + \Phi \tag{11}$$

sowie Φ_i und Φ separat erfüllen die Helmholtz-Gleichung

$$(\Delta^2 + k^2)\Phi_* = 0. \tag{12}$$

Identifiziert man die y-Komponente des $\boldsymbol{H}$-Feldes der einfallenden Welle mit Φ_i (lineare Polarisation: $\boldsymbol{H} \parallel \hat{\boldsymbol{e}}_y$ angenommen), so folgt aus den Randbedingungen auf dem Leiter und Stetigkeit im übrigen Raum

$$\begin{array}{lccl} \text{(a)} & \dfrac{\partial\Phi_t}{\partial z} = 0 & & z = 0, x \leq 0 \\ \text{(b)} & \dfrac{\partial\Phi_t}{\partial z} & \text{stetig bei} & z = 0, x > 0 \\ \text{(c)} & \Phi_t & \text{stetig bei} & z = 0, x > 0. \end{array} \tag{13}$$

Daraus ergeben sich entsprechende Bedingungen an Φ. Aus den Strahlengängen der geometrischen Optik kann man die xz-Ebene in drei Bereiche aufteilen, in denen Φ aus einer gebeugten plus einer reflektierten Welle besteht (Region (1)), aus einer gebeugten minus einer einfallenden (Region (2)), oder nur aus einer gebeugten (Region (3)). Die gebeugte Welle Φ_{diff} wird aber im Wesentlichen durch Linienladungen erzeugt, das heisst sie hat asymptotisch die Form einer Zylinderwelle mit

$$\Phi_{\text{diff}} \sim C_1 H_0^{(1)}(kr). \tag{14}$$

Zusammen mit der Form der reflektierten Welle, die wir kennen, können die Abfalleigenschaften der Welle Φ in den drei Regionen bestimmt werden ($\rightarrow$ (d)). Als letzter Punkt verlangen wir Randbedingungen bei $x = 0$:

$$\begin{array}{lccl} \text{(e)} & \dfrac{\partial\Phi_t}{\partial z} \rightarrow C_2 x^{-\frac{1}{2}} & \text{für} & x \rightarrow +0, z = 0 \\ \text{(f)} & \Phi_t \ \rightarrow C_i & \text{für} & x \rightarrow \pm 0, z = \pm 0. \end{array} \tag{15}$$

Diese Randbedingungen sind wichtig, um die Eindeutigkeit der Lösung zu garantieren (siehe später), sie werden durch die Form der Divergenz an der Kante bestimmt.

Als letzten Input zitieren wir einen Satz über Fourierintegrale aus der Funktionentheorie.
Satz: Sei $f(x)$ eine Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, mit

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq A e^{\tau_- x} \qquad && x \to +\infty \\ |f(x)| &\leq B e^{\tau_+ x} \qquad && x \to -\infty \end{aligned}$$

wobei $\tau_+ > \tau_-$. Falls für ein $\tau_0 \in \ ]\tau_-, \tau_+[$ das Fourier-Integral für $f(x)e^{-\tau_0 x}$ existiert, dann ist

$$F(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{\mathrm{i}\alpha x} dx \tag{16}$$

eine meromorphe Funktion, analytisch im Streifen $\tau_- < \tau < \tau_+$, und es gilt die Rücktransformation

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathrm{i}\tau-\infty}^{\mathrm{i}\tau+\infty} F(\alpha) e^{-\mathrm{i}\alpha x} d\alpha \tag{17}$$

für irgendein $\tau \in \ ]\tau_-, \tau_+[$.
Das Theorem kann mathematisch rigoroser formuliert werden, für uns reicht diese Form.

Aufgaben:

a) Versuche, die beiden oberen Abschnitte zu verstehen, und rechne allfällige Unklarheiten nach. Der Beweis des Satzes ist sekundär, es gibt auch ohne diesen Beweis genug zu tun. Formuliere alle Randbedingungen für Φ.

b) Definiere die Fouriertransformierten

$$\Phi(\alpha, z) = \Phi_+(\alpha, z) + \Phi_-(\alpha, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \Phi(x, z) e^{\mathrm{i}\alpha x} dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} \Phi(x, z) e^{\mathrm{i}\alpha x} dx \tag{18}$$

und bestimme die Analytizitätsbereiche der drei Funktionen ($\Rightarrow$ Streifen $\mathcal{S}_+, \mathcal{S}_-, \mathcal{S}$ wie im Satz).

c) Zeige, dass $\Phi(\alpha, z)$ beschränkt ist für $|z| \to \infty$, falls α im Streifen $\mathcal{S}$ liegt.

d) Löse die Helmholtz-Gleichung in $\Phi(\alpha, z)$ (komplexe Fouriertransformation in der x-Komponente wie in b)). Beachte, dass man für $z \leq 0$ und $z \geq 0$ unabhängige Lösungen ansetzen muss, wegen der Unstetigkeit in $x < 0$. In der FT-Helmholtz-Gleichung kommt der Faktor

$$\gamma \equiv (\alpha^2 - k^2)^{\frac{1}{2}} \tag{19}$$

vor. Es stellt sich nun die Frage, wie diese Wurzel definiert werden muss, damit wir eine Lösung kriegen, die nach dem Satz rücktransformiert werden kann. Die Bedingung ist im wesentlichen Punkt c): wir müssen erreichen, dass unsere Definition der Wurzel in den Lösungen bei d) eine beschränkte Funktion für $|z| \to \infty$ produziert, falls $\alpha \in \mathcal{S}$. Die Frage ist also, wie wir die Schnitte (Cuts) in der komplexen Zahlenebene zu legen haben (Halbstrahlen von den Punkten $\pm k$ ausgehend, aber in welche Richtung?) Am einfachsten zerlegen wir γ in einfache Wurzeln:

$$\begin{aligned} \gamma &= (\alpha - k)^{\frac{1}{2}} (\alpha + k)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{oder} \\ \gamma &= (k - \alpha)^{\frac{1}{2}} (-k - \alpha)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Ueberqueren wir einen Cut im Gegenuhrzeigersinn, so lesen wir eine Phase $-\pi$ auf. Zu finden ist die einzige (qualitativ verschiedene) Lösung, die Cuts zu legen, so dass man keinen Cut in $\mathcal{S}$ hat und $\gamma \to |\alpha|$ für $|\sigma| \to \infty$, $\tau = \text{const.} \in \ ]\tau_-, \tau_+[$. Diese letzte Bedingung ist aber notwendig, um beschränkte Lösungen der Helmholtz-Gleichung zu kriegen. (Zeige das.)

e) Wenn wir bis jetzt alles richtig gemacht haben, kriegen wir die Lösung

$$\Phi(\alpha, z) = \pm A(\alpha) e^{\mp\gamma z} \qquad \text{für} \quad z \gtrless 0. \tag{20}$$

f) Nun sollen die Randbedingungen (b) und (c) in Bedingungen an $\Phi(\alpha, \pm 0), \Phi_\pm(\alpha, \pm 0)$ umformuliert werden, wobei $+0$ bedeutet: $\lim_{z\to+0}$. Ausgewertet mit (20) ergibt sich ein Gleichungssystem in $\Phi_+(\alpha, 0)$, $\Phi_-(\alpha, +0)$, $\Phi_-(\alpha, -0)$, $\Phi'_+(\alpha, 0)$, $\Phi'_-(\alpha, 0)$, $\gamma(\alpha)$ und $A(\alpha)$, aus dem $A(\alpha)$ eliminiert werden kann. Was bleibt, sind zwei Gleichungen der Wiener-Hopf Form. Die eine involviert nur die nicht abgeleiteten $\Phi_\pm$, die andere besteht aus $\Phi'_+(\alpha, 0)$, einer bekannten Funktion $f(\alpha)$ mal eine Linearkombination von $\Phi_-(\alpha, +0)$ und $\Phi_-(\alpha, -0)$ (diese Linearkomb. wollen wir $D_-(\alpha)$ taufen), sowie $\Phi'_-(\alpha, 0)$. Diese letzte Funktion kennen wir aber nach Randbedingung (a). Diese Wiener-Hopf Gleichung ist jetzt zu lösen. (Die andere produziert nichts interessantes.)

Hinweis: die Zerlegung von γ in ein Produkt ist einfach. Bei der Zerlegung des anderen Terms in eine Summe bringe den Pol zum Verschwinden durch Erzeugung einer Nullstelle am selben Ort. (Geschickte Subtraktion eines anderen Terms!) Mit einem Satz von Abel (siehe unten) führe die Wiener-Hopf Idee zu Ende. Aus der Lösung der Wiener-Hopf Gleichung erhält man durch Rücktransformation die Lösung in den Koordinaten x, z (siehe Satz in der Einführung!)

Satz (Abel):

Sei

$$F_+(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty f(x) e^{\mathrm{i}\alpha x} dx \tag{21}$$

und $f(x) \sim A x^\eta$ für $x \to +0$ mit $-1 \le \eta \le 0$, dann gilt

$$F_+(\alpha) \sim C \alpha^{-\eta-1} \quad \text{für} \quad \alpha \to \infty, \quad \mathrm{Im}\alpha > 0. \tag{22}$$

g) Die Lösung von Punkt h) möchte man gerne noch etwas hübscher schreiben, insbesondere hätte man gerne statt des komplexen Integrals irgendeine tabellierte Funktion. Mit der Deformation des Integrationswegs

$$\alpha = -k \cos(\varphi + \mathrm{i}t), \qquad -\infty < t < \infty \tag{23}$$

und Residuensatz kann man das Resultat von f) in Fresnelintegralen $F(v)$ ausdrücken:

$$F(v) \equiv \int_v^\infty e^{\mathrm{i}u^2} du. \tag{24}$$

Dabei ist $0 \le \varphi \le \pi$ definiert durch $x = r\cos\varphi$ und $|z| = r\sin\varphi$, und man hat die Fälle $z \lessgtr 0$ zu unterscheiden. Ueberlege, wie die Integrationswege aussehen und zeige, dass Residuensatz gebraucht werden kann. Das Integral, das nach Ausführen des Residuensatzes überlebt, kann man entweder selber berechnen (sehr schwierig!!) oder die folgende Identität verwenden:

$$2\mathrm{i}\sin\frac{1}{2}\theta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(\mathrm{i}kr\cosh(t))\sin\frac{1}{2}(\varphi + \mathrm{i}t)}{\cos(\varphi + \mathrm{i}t) + \cos\theta} dt = 2\mathrm{i}(H(\varphi + \theta) - H(\varphi - \theta)) \tag{25}$$

mit

$$H(\lambda) = \sqrt{\pi} e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} e^{-\mathrm{i}kr\cos\lambda} G(\lambda) \tag{26}$$

und

$$G(\lambda) = \begin{cases} F(\sqrt{2kr}\cos\frac{1}{2}\lambda) & \cos\frac{1}{2}\lambda > 0 \\ -F(-\sqrt{2kr}\cos\frac{1}{2}\lambda) & \cos\frac{1}{2}\lambda < 0 \end{cases} . \tag{27}$$

Mit der Gleichung

$$F(v) + F(-v) = \sqrt{\pi} e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} \tag{28}$$

kann man ein geschlossenes Resultat für $\Phi_t(\varphi, r)$ mit Fresnelintegralen erreichen.

h) Hört mir noch jemand zu?? Man könnte auch noch Grenzfälle berechnen....

Literatur:

[1] B. Noble, Methods based on the Wiener-Hopf Technique, Pergamon Press (1958).

[2] A.Sommerfeld, Vorl. über theor. Physik, Bd. IV: "Optik", Akad. Verlagsges. Leipzig (1964).