Elektrodynamik
Serie 4

Aufgabe 4.1 Kondensatoren

a) Betrachte zwei konzentrische leitende Zylinder der Länge L und mit Radien $R_1 < R_2$ (Koaxialkabel), welche durch ein nichtleitendes Medium (z.B. Luft oder Vakuum) voneinander isoliert sind. Berechne die Kapazität C pro Längeneinheit dieser Anordnung im Falle sehr langer Leiter $L \gg R_2$.
Wie ändert sich die Kapazität, wenn der innere Zylinder nicht hohl, sondern voll ist? Wie gross ist R_2, falls $R_1 = 1\,\mathrm{mm}$ und $C = 0.72$ pF/cm?

b) Bestimme die Kapazität pro Längeneinheit zweier paralleler zylindrischer Leiter mit Radien R_1 und R_2. Die Distanz d zwischen den beiden Zylindern sei viel grösser als die beiden Radien. Man nehme des weiteren an, die Leiter seien sehr lang (Länge $L \gg R_1, R_2$).

Aufgabe 4.2 Differentialgleichungen und Eigenwertprobleme

Es sei folgende homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung gegeben:

$$\frac{d^2}{dx^2}\, u(x) + \lambda^2\, u(x) = 0\,, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{1}$$

Diese Gleichung kann man als *Eigenwertgleichung* für den Operator $-d^2/dx^2$ auffassen: $-d^2/dx^2\, u(x) = \lambda^2\, u(x)$. Sie wird in dieser Form z.B. in der Quantenmechanik auftauchen (zeitunabhängige Schrödingergleichung des freien Teilchens).

a) Finde die allgemeine Lösung der Gl. (1).

b) Betrachte Lösungen $u(x)$ auf dem endlichen Intervall $[0, L]$. Welche Einschränkungen für λ haben die Randbedingungen $u(0) = u(L) = 0$ zur Folge?

c) Betrachte jetzt Lösungen $u(x) \in L_\infty(\mathbb{R})$, d.h. $\sup_{x\in\mathbb{R}} u(x) < \infty$. Wie wird das Spektrum (erlaubte Werte für λ) in diesem Fall eingeschränkt?

Aufgabe 4.3 Leitende Spitze

Ziel dieser Aufgabe ist es, die Seiten 53-55 und 61-63 des Skriptes durchzuarbeiten und zu einem besseren Verständnis der in der ED auftauchenden Differentialgleichungen und deren (physikalisch sinnvollen) Lösungen zu gelangen. Die vorherige Aufgabe diente als einführendes Beispiel.

a) Schreibe zuerst die Laplacegleichung, $\nabla^2\,\Phi = 0$, in Kugelkoordinaten und mache den Separationsansatz $\Phi(\mathbf{r}) = u(r)\,P(\vartheta)\,\chi(\varphi)/r$. Leite die Dgl. für $P(\vartheta)$ (Gl. (2.53)) für den Fall $m = 0$ her und fasse sie als Eigenwertgleichung auf. Im Skript nehmen wir nur Lösungen, $l = 0, 1, 2, \ldots$ (Legendrepolynome $P_l(z)$, $z := \cos\vartheta$). Welche Lösungen findet man für $l = -1, -2, \ldots$ und für l nicht ganz? Wie heissen diese? Wann darf man Lösungen mit l nicht ganz wählen?

Betrachte jetzt die geerdete konische Spitze (bzw. Einschnitt) von Seite 61 mit Winkel $0 < \theta < \pi$. Gesucht ist das Potential $\Phi(r, \vartheta, \varphi)$ im Aussenraum $(0 \le \vartheta \le \theta)$.

b) Mache wie im Skript die Variablentransformation $\xi := \frac{1}{2}(1-z)$ und leite ausgehend von der Legendre-Dgl. (2.60) die Gl. (2.80) her (die Separationskonstante l heisst jetzt ν). Warum darf man $m = 0$ setzen? Löse die Dgl. mit einem Potenzreihenansatz,

$$P(\xi) = \xi^\alpha \sum_{j=0}^{\infty} a_j \, \xi^j \, . \tag{2}$$

(Man erhält so den Ausdruck unmittelbar nach Gl. (2.80).) Für welche ν haben diese Lösungen $P_\nu(z)$ Singularitäten auf dem Intervall $z \in [-1, 1]$? Gehören diese Singularitäten zum (physikalischen) Definitionsbereich? Wie schränkt die Randbedingung $\Phi(\vartheta = \theta) = 0$ die möglichen Werte für ν ein? Wie hängen diese Werte von θ ab?

c) Plotte auf dem Computer $P_l(\cos\theta)$ für die Werte $l = 0.1; 1; 1.5; 2$ und $\vartheta \in [0, \pi]$.