Thermodynamik
Serie 11

Aufgabe 11.1 Ladungs- und Wärmetransport

Finde einen Ausdruck für den elektrischen- sowie den Wärmestrom eines Systems von Elektronen unter Benutzung der Relaxationszeitapproximation (RZA). Leite daraus das Wiedemann-Franz Gesetz her.
Die Gleichgewichtsverteilung eines Systems von Fermionen ist semiklassisch gegeben durch

$$f_{\mathrm{GGW}}(\mu, T, \mathbf{v}) = \left(e^{[\epsilon(\mathbf{v})-\mu]/k_{\mathrm{B}}T} + 1\right)^{-1}, \tag{1}$$

wobei $\epsilon(\mathbf{v}) = mv^2/2$. Nach der RZA befindet sich das System in 0-ter Ordnung im lokalen Gleichgewicht

$$f_0(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = f_{\mathrm{GGW}}[\mu(\mathbf{r}), T(\mathbf{r}), \mathbf{v}] = \left(e^{[\epsilon(\mathbf{v})-\mu(\mathbf{r})]/k_{\mathrm{B}}T(\mathbf{r})} + 1\right)^{-1} \tag{2}$$

Dies gibt für die rechte Seite der Boltzmann-Glg. $(\partial f_0/\partial t)_{\text{Stösse}} = 0$ (Gleichgewicht), allerdings verschwindet im allgemeinen die linke Seite nicht. Mit dem Ansatz $f = f_0 + g$ mit kleinem $g = \tau g_1 + \tau^2 g_2 + \ldots$ erhält man nun (in 1-ter Ordnung)

$$[\partial_t + \mathbf{v}\cdot\nabla_{\mathbf{r}} + (\mathbf{F}/m)\cdot\nabla_{\mathbf{v}}]f_0 = -\frac{f-f_0}{\tau} = -\frac{g}{\tau} = -g_1 + \mathcal{O}(\tau), \tag{3}$$

wobei τ die mittlere Zeit zwischen zwei Kollisionen ist, die sogenannte Relaxationszeit.

1. Berechne $g_1(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ für das System bei elektro-magnetischen Feldern $\mathbf{E}(\mathbf{r})$, $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ und dem Temperaturfeld $T(\mathbf{r})$.

2. Zur Herleitung der Ausdrücke für den elektrischen- und den Wärmestrom betrachte man ein statisches $\mathbf{E}$- und ∇T-Feld und nehme an, dass $\tau = \tau(\epsilon)$ nur von der Energie $\epsilon(\mathbf{v})$ abhängt.

   Die Ströme sind gegeben durch

$$\mathbf{j}_{\mathrm{EM}} = \int \frac{d^3k}{4\pi^3}(-e)\mathbf{v}g(\mathbf{v}) \tag{4}$$

$$\mathbf{j}_{\text{Wärme}} = \int \frac{d^3k}{4\pi^3}[\epsilon(\mathbf{v})-\mu]\mathbf{v}g(\mathbf{v}) \tag{5}$$

   mit $e > 0$, wobei $\hbar\mathbf{k} = m\mathbf{v}$ und der Faktor im Nenner vom Mass im quantenmechanischen Zustandsraum herrührt (inklusive Faktor 2 wegen des Spins). Mit $\mathcal{E} = \mathbf{E} + \nabla\mu/e$ können wir die Ströme umschreiben als

$$\begin{pmatrix}\mathbf{j}_{\mathrm{EM}}\\ \mathbf{j}_{\text{Wärme}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}L_{11} & L_{12}\\ L_{21} & L_{22}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\mathcal{E}\\ -(\nabla T)/T\end{pmatrix} \tag{6}$$

   Berechne die Koeffizienten L_{kl} und zeige explizit, dass $L_{12} = L_{21}$ gilt (Onsager-Casimir Beziehung).

3. Zeige, dass das Wiedemann-Franz Gesetz gilt und leite den Lorentz-Faktor $\mathcal{L}$ in obigem Modell her

$$\frac{\varkappa}{\sigma} = \mathcal{L}T \text{ mit } \mathcal{L} = \frac{\pi^3}{3}\frac{k_{\mathrm{B}}^2}{e^2}. \tag{7}$$