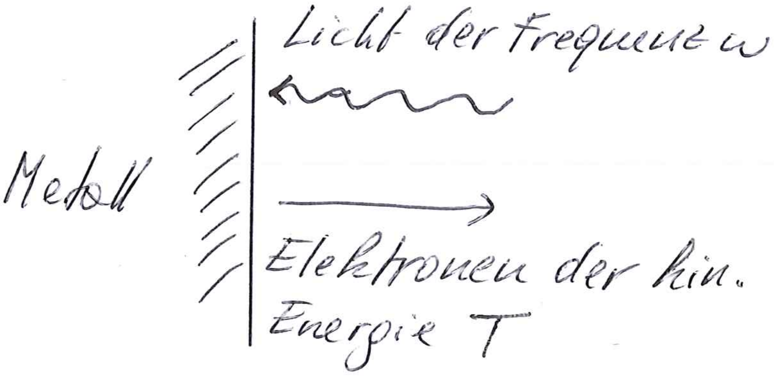
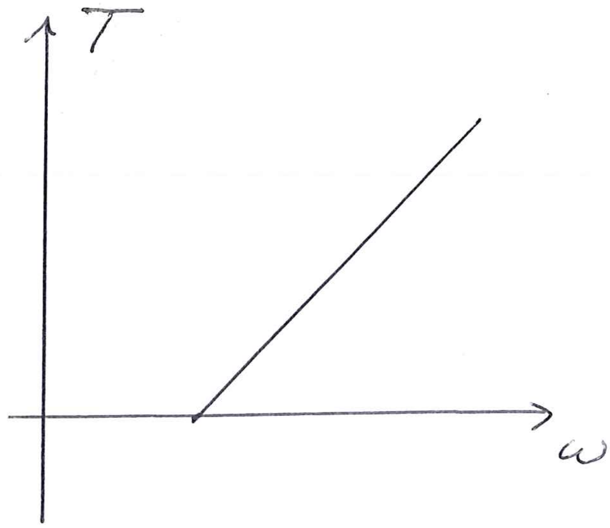
8. Photonen

Die Plancksche Konstante $\hbar \cong 1.054 \cdot 10^{-34}$ J·s tritt erstmals im Planckschen Strahlungsgesetz (1900) auf, dann wieder im Zusammenhang mit dem <u>photoelektrischen Effekt</u> (1902):





Die Energie der emittierten Elektronen hängt nur von der Frequenz ω, nicht aber von der Intensität der einfallenden Strahlung – entgegen der klassischen Vorstellung (davon abhängig ist hingegen die Emissionsrate).

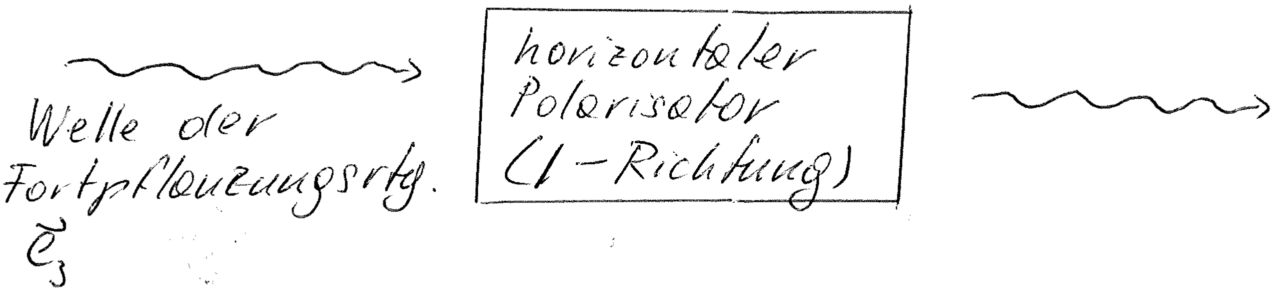
<u>Deutung</u> (Einstein 1905): Licht der Frequenz ω besteht aus Energiequanten (Photonen)

$$E = \hbar\omega ,$$

die "sprunghaft" an die Elektronen übergeben werden können; diese entweichen dann aus dem Metall mit der Energie

$$T = \hbar\omega - W .$$
$\uparrow$ Austrittsarbeit

Diese Vorstellung steht aber im Widerspruch zu Polarisationsexperimenten (vgl. p. 23)



$$\vec{E}_0 = \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \vec{E}_0 = \begin{pmatrix} E_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Energie $\mathcal{E}$ (einer räumlich ausgedehnten, aber endlichen Welle) $\propto |\vec{E}_0|^2$:

$$\mathcal{E} \longrightarrow \frac{|E_1|^2}{|E_1|^2 + |E_2|^2}\,\mathcal{E} \qquad (1)$$

(z.B. $\mathcal{E} \to \frac{1}{2}\mathcal{E}$ für $\vec{E}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (45°-polarisierte Welle)).

Es können nicht beide ganzzahlige Vielfache von $\hbar\omega$ sein!

<u>Quantenmechanische Interpretation</u>:

$$W = \frac{|E_1|^2}{|E_1|^2 + |E_2|^2} \qquad (2)$$

ist die <u>Wahrscheinlichkeit</u> für Transmission <u>eines</u> Photons durch den horizontalen Polarisator.
Die transmittierte Energie ist jeweils $\hbar\omega$ oder 0, im <u>Mittel</u> also (1). Für N unabhängige Photonen

sind die relativen Schwankungen $O(\sqrt{N}/N) = O(1/\sqrt{N})$. Das klassische Resultat gilt für $N \to \infty$.

Reine Zustände

Wir normieren die Polarisationen $\vec{E}_0$ auf 1 und bezeichnen sie neu (nach Dirac) mit $|\psi\rangle$:

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{H} = \mathbb{C}^2$$

mit $|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 = 1$. Jeder Polarisation ist ein <u>reiner Zustand</u> $\{|\psi\rangle e^{i\alpha} \,|\, \alpha \in \mathbb{R}\}$ zugeordnet, d.h. $|\psi\rangle$ und $|\psi\rangle e^{i\alpha}$ stellen denselben Zustand dar.

Das Skalarprodukt auf $\mathcal{H}$ ist (vgl. (3.5))

$$\langle \varphi | \psi \rangle \equiv \overline{\varphi_1} \psi_1 + \overline{\varphi_2} \psi_2 = \overline{\langle \psi | \varphi \rangle}$$

Die horizontal, bzw. vertikal polarisierten Zustände

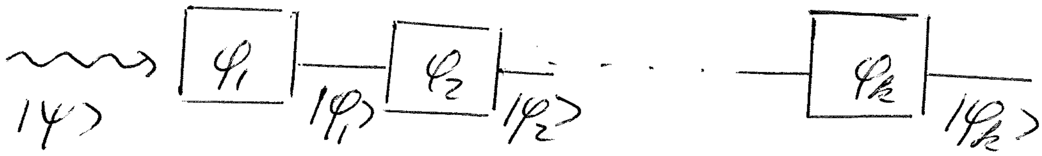
$$|1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

bilden die Standardbasis: $|\psi\rangle = \psi_1 |1\rangle + \psi_2 |2\rangle$. $= |1\rangle\langle 1|\psi\rangle + |2\rangle\langle 2|\psi\rangle$.

Ein Filter, der $|\varphi\rangle$-polarisierte Zustände durchlässt, bzw. die dazu orthogonale Komponente absorbiert, hat eine Transmissionsw'keit

$$W = |\underbrace{\langle \varphi | \psi \rangle}_{\text{Übergangsamplitude}}|^2 \tag{3}$$

für $|\psi\rangle$-Photonen. Dies verallgemeinert (2) und ist unabhängig von der für $|\varphi\rangle$, $|\psi\rangle$ gewählten Phasen. Reiht man Filter zu Zuständen $|\varphi_1\rangle, \dots |\varphi_k\rangle$ nacheinander,



so ist

$$W = |\langle\varphi_k|\varphi_{k-1}\rangle \dots \langle\varphi_2|\varphi_1\rangle\langle\varphi_1|\psi\rangle|^2$$

die resultierende Transmissionsw'keit.

Observablen widergeben das (zahlenmässige) Ergebnis einer Messung, z.B. 1, falls das Photon durch den $|\varphi\rangle$-Filter transmittiert wird, und 0 sonst (Bsp. i). Quantenmechanisch sind sie durch lineare Operatoren $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ gegeben, die selbstadjungiert sind: $A^* = A$. Sie besitzen somit eine orthonormierte Eigenbasis

$$A|\varphi_i\rangle = a_i|\varphi_i\rangle$$

$$\langle\varphi_i|\varphi_j\rangle = \delta_{ij}\,, \quad \sum_i |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i| = 1 \qquad (4,5)$$

$(i=1,2)$; bzw. die Spektraldarstellung

$$A = \sum_i a_i |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|\,, \qquad (6)$$

wobei $(|\varphi\rangle\langle\tilde\varphi|)|\psi\rangle := |\varphi\rangle \cdot \langle\tilde\varphi|\psi\rangle$, d.h. $|\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|$ ist der Projektor auf den Zustand $|\varphi_i\rangle$.

<u>Interpretation</u>: Bei der Messung der Observablen, die durch A wiedergegeben ist, treten als mögliche Messwerte nur die Eigenwerte a_i auf, und zwar mit

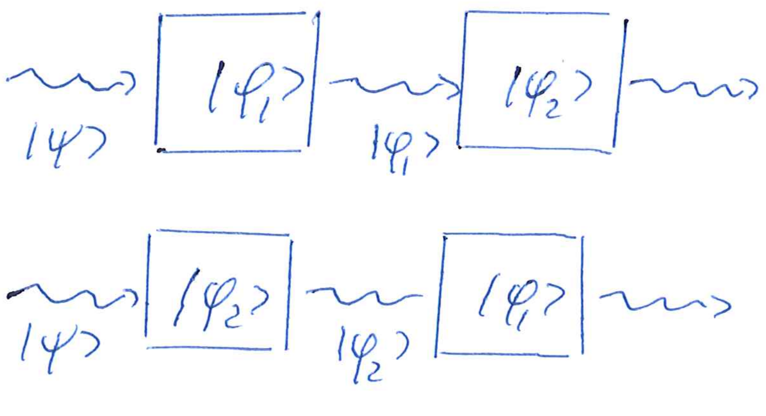
$|\langle\varphi_i|\psi\rangle|^2$: W'keit dafür, dass A im Zustand $|\psi\rangle$ den Wert a_i annimmt.

Insbesondere ist wegen (5)

$$\langle\psi|A|\psi\rangle \equiv \langle\psi|A\psi\rangle$$
$$= \sum_i \langle\psi|\underbrace{A|\varphi_i\rangle}_{=a_i|\varphi_i\rangle}\langle\varphi_i|\psi\rangle = \sum_i a_i|\langle\varphi_i|\psi\rangle|^2$$

der <u>Erwartungswert</u> der Messung von A.

<u>Bsp.</u> i) (Fortsetzung) Hier ist $A = |\varphi\rangle\langle\varphi|$ ein Projektor: $A^2 = A$. Physikalisch: zwei hintereinander geschaltete gleiche Filter sind einem einzigen äquivalent. Für verschiedene Filter $|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle$ hängt i.A. die Kombination von der Reihenfolge ab:

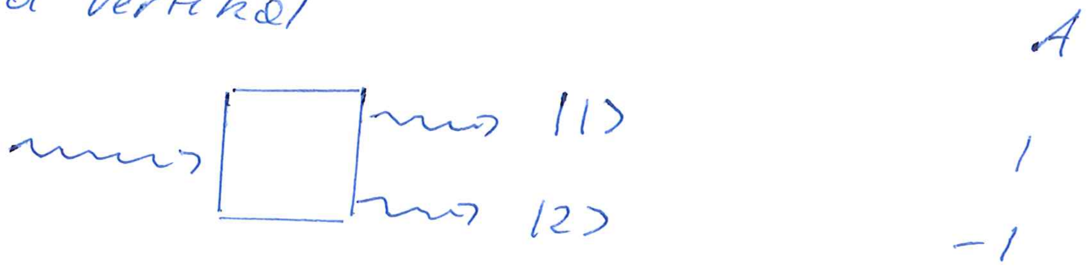


$$W_{21} = |\langle\varphi_2|\varphi_1\rangle\langle\varphi_1|\psi\rangle|^2$$
$$\neq$$
$$W_{12} = |\langle\varphi_1|\varphi_2\rangle\langle\varphi_2|\psi\rangle|^2$$

Wegen $W_{21} = \langle\psi|A_1A_2A_1|\psi\rangle$, $A_i = |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|$, ist dies

Ausdruck von $[A_1, A_2] \equiv A_1 A_2 - A_2 A_1 \neq 0$.

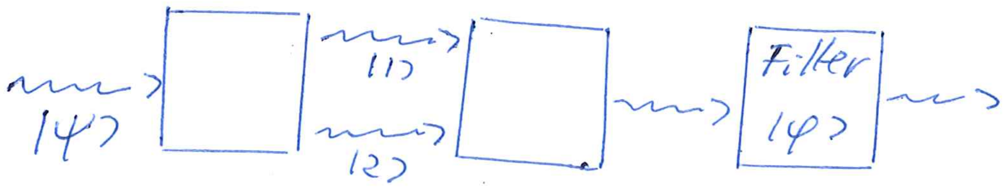
ii) Ein Analysator (typischerweise ein doppelbrechendes Prisma) zerlegt den Strahl in zwei zueinander orthogonale Polarisationen, z.B. horizontal und vertikal



(7)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = |1\rangle\langle 1| - |2\rangle\langle 2|$$

Ein Filter kann als Analysator realisiert werden durch Schliessung eines Ausgangs. Reiht man zwei Analysatoren gegeneinander auf,



so ist die W'keit für Transmission <u>nicht</u> die Summe der W'keiten der beiden Pfade,

$$W = |\langle\varphi|1\rangle\langle 1|\psi\rangle|^2 + |\langle\varphi|2\rangle\langle 2|\psi\rangle|^2, \quad (8)$$

sondern ergibt sich aus der Summe der Übergangsamplituden

(9)

$$W = |\langle\varphi|1\rangle\langle 1|\psi\rangle + \langle\varphi|2\rangle\langle 2|\psi\rangle|^2 = |\langle\varphi|\psi\rangle|^2.$$

Der Unterschied besteht in den Interferenztermen

$$\overline{\langle\varphi|1\rangle\langle 1|\varphi\rangle}\langle\varphi|2\rangle\langle 2|\varphi\rangle + (1 \leftrightarrow 2).$$

<u>Drehungen</u> $R(\varphi)$ um die Fortpflanzungsrichtung $\vec{e}_3$, vgl. (3.7) sind bzgl. der Standardbasis gegeben durch

$$R(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}. \tag{10}$$

$R(\varphi)$ ist <u>unitär</u>: $R(\varphi)^* R(\varphi) = 1$; und $\varphi \mapsto R(\varphi)$ ist eine <u>1-parametrige Gruppe</u>:

$$R(0) = 1 \quad , \quad R(\varphi_1) R(\varphi_2) = R(\varphi_1 + \varphi_2)$$

(also auch $R(\varphi)^* = R(-\varphi)$). Die <u>Erzeugende</u>

$$L = i\hbar \left.\frac{dR}{d\varphi}\right|_{\varphi=0}$$

ist dann selbstadjungiert: $L^* = L$. Letztere bestimmt die Gruppe: wegen $dR/d\varphi = -(i/\hbar) L R(\varphi)$ ist

$$R(\varphi) = e^{-\frac{i}{\hbar} L \varphi}.$$

Für (10) nennen wir die Erzeugende

$$L_3 \equiv L = \hbar \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \tag{11}$$

<u>Drehimpuls</u> (vgl. Allg. Mechanik), oder genauer Drehimpulskomponente bzgl. der Fortpflanzungs-

richtung $\vec{e}_3$ (Helizität). Deren Eigenvektoren sind rechts/links polarisierte Zustände $|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\binom{1}{\pm i}$

$$L_3 |\pm\rangle = \pm \hbar |\pm\rangle .$$

Eine weitere Observable des Photons ist die Energie $H = \hbar\omega \mathbb{1}$, die in jedem Zustand den Wert $\hbar\omega$ hat. Die Zeitevolution von $|\psi\rangle$, vgl. (3.3), ist ebenfalls durch ω bestimmt:

$$|\psi_t\rangle = e^{-i\omega t} |\psi\rangle = e^{-i\frac{H}{\hbar}t} |\psi\rangle ,$$

bzw.

$$i\hbar \frac{d|\psi_t\rangle}{dt} = H |\psi_t\rangle$$

(Schrödingergleichung): die Observable Energie, H, ist die Erzeugende der Zeittranslationen.

Wir verifizieren nun, dass die Definition (11) von L_3 mit der elektrodynamischen übereinstimmt. Dort gilt (vgl. p. 51)

$$\vec{L} = \frac{1}{c}\int d^3x \, \vec{x} \wedge (\vec{E} \wedge \vec{B})$$

$$= \frac{1}{c}\int d^3x \, E \wedge \vec{A} + \frac{1}{c}\int d^3x \sum_{i=1}^{3} E_i (\vec{x} \wedge \vec{\nabla}) A_i \quad , (12)$$

wobei der zweite Ausdruck aus $\vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A}$

und $\vec\nabla\cdot\vec E = 0$ durch partielle Integration folgt.

Wir wollen nun L_3 für eine räumlich ausgedehnte (Volumen V) Welle auswerten. Die reellen Felder sind

$$\vec E(\vec x, t) = \mathrm{Re}\begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(kx_3 - \omega t)},$$

$$\vec A(\vec x, t) = \frac{c}{\omega}\mathrm{Im}\begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ 0 \end{pmatrix} e^{i(kx_3 - \omega t)}, \qquad (13)$$

letzteres wegen $\vec E = -(1/c)\,\partial\vec A/\partial t$. Da ausser an der Oberfläche von V, wo (13) nicht gilt, $\vec A$ nicht von x_1, x_2 abhängt, liefert $(\vec x \wedge \vec\nabla)_3 = x_1\partial_2 - x_2\partial_1$ keinen Beitrag zum zweiten Term (12) für L_3, d.h. dieser ist ein vernachlässigbarer Oberflächenterm. Es bleibt

$$L_3 = \frac{1}{\omega}\int d^3x \left(\mathrm{Re}(E_1 e^{i(kx_3-\omega t)})\,\mathrm{Im}(E_2 e^{i(\dots)}) - (1\leftrightarrow 2)\right)$$

$$= \frac{V}{2\omega}(\underbrace{\mathrm{Re}\,E_1\cdot\mathrm{Im}\,E_2 - \mathrm{Re}\,E_2\cdot\mathrm{Im}\,E_1}_{\mathrm{Im}(\bar E_1 E_2)})$$

$$= \frac{V}{2i\omega}(\bar E_1 E_2 - \bar E_2 E_1).$$

Zugleich ist $\mathcal{E} = \hbar\omega$ für

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\int d^3x\,(\vec E^2 + \vec B^2) = \frac{V}{2}(\bar E_1 E_1 + \bar E_2 E_2);$$

also

$$L_3 = \frac{\hbar}{i}(\bar{\varphi}_1\varphi_2 - \bar{\varphi}_2\varphi_1) = \langle\varphi|L_3|\varphi\rangle,$$

wobei die Observable L_3 durch (11) gegeben ist.

Gemischte Zustände

Ein Zustand $|\varphi\rangle$ tritt nach (3) mit W'keiten $w_1 = |\langle 1|\varphi\rangle|^2$, bzw. $w_2 = |\langle 2|\varphi\rangle|^2$ aus den beiden Ausgängen $|1\rangle, |2\rangle$ des Analysators (7) hervor. Es ist aber falsch, daraus zu schliessen, $|\varphi\rangle$ sei eine statistische Mischung von $|1\rangle$ und $|2\rangle$ zu Anteilen w_1 bzw. w_2: so gilt z.B. $w_1 = w_2 = 1$ sowohl für $|\varphi\rangle = |45^\circ\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\binom{1}{1}$, wie auch für $|\varphi\rangle = |+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\binom{1}{i}$, obschon sie verschieden sind. Solche statistische Mischungen, die der klassischen Vorstellung von W'keit als unvollständige Information über den reinen Zustand des Einzelfalls entsprechen, gibt es aber auch in der Quantenmechanik (gemischte Zustände). Sie sind gegeben durch Dichtematrizen, d.h. Operatoren $P : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ mit

$$P = P^* \geq 0, \qquad (14)$$

$$\mathrm{sp}\, P = 1 \qquad (15)$$

Bei ihrer Spektraldarstellung

$$P = \sum_k w_k |\varphi_k\rangle\langle\varphi_k|$$

gilt wegen (14, 15)

$$w_k \geq 0 \quad , \quad \sum_k w_k = 1,$$

was ihre Interpretation stiftet: P ist eine Mischung der reinen Zuständen $|\varphi_k\rangle$ mit W'keiten w_k. Reine Zustände $|\psi\rangle$ entsprechen dem Spezialfall, wo ein $w_k = 1$ ist und die restlichen $= 0$ sind, d.h. wo $P = P^2$ ein Projektor ist (der wegen (15) 1-dimensional ist). Der Erwartungswert einer Observablen A im gemischten Zustand P ist

$$\begin{aligned} \langle A\rangle = sp(PA) &= \sum_k w_k \, sp(|\varphi_k\rangle\langle\varphi_k|A) \\ &= \sum_k w_k \langle\varphi_k|A|\varphi_k\rangle, \end{aligned} \tag{16}$$

d.h. gleich der gewichteten Summe der Erwartungswerte von A in den beteiligten reinen Zuständen $|\varphi_k\rangle$.

Ein gemischter Zustand $P = w_1|\varphi_1\rangle\langle\varphi_1| + w_2|\varphi_2\rangle\langle\varphi_2|$ $(w_i \geq 0, w_1 + w_2 = 1)$, präpariert man dadurch, dass man zufällig mit W'keit w_1, w_2 ein Photon $|\varphi_1\rangle$-

bzw. $|\varphi_2\rangle$-polarisiert präpariert. Beachte aber, dass die reinen Zustände $|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle$ nicht unbedingt aus P rekonstruiert werden können.

Bsp: i) $|\pm 30^\circ\rangle = \begin{pmatrix} \pm\sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ (nicht $\perp$ zueinander),

also $$|\pm 30^\circ\rangle\langle \pm 30^\circ| = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & \pm\sqrt{3} \\ \pm\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Mischung

$$P := \frac{1}{2}|30^\circ\rangle\langle 30^\circ| + \frac{1}{2}|-30^\circ\rangle\langle -30^\circ| = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{3}{4}|1\rangle\langle 1| + \frac{1}{4}|2\rangle\langle 2|$$

ist zugleich Mischung von $|1\rangle, |2\rangle$.

ii) Selbst bei Mischung orthogonaler Zustände (z.B. $|\pm 45^\circ\rangle$) mit gleichen W'keit sind die reinen Zustände nicht eindeutig:

$$P := \frac{1}{2}|45^\circ\rangle\langle 45^\circ| + \frac{1}{2}|-45^\circ\rangle\langle -45^\circ| = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}|1\rangle\langle 1| + \frac{1}{2}|2\rangle\langle 2|.$$

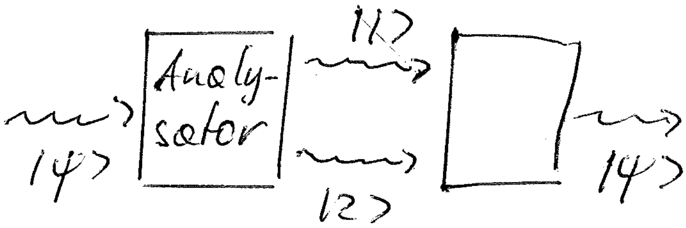
Der Unterschied von

$$|\psi\rangle = |1\rangle\langle 1|\psi\rangle + |2\rangle\langle 2|\psi\rangle \qquad (17)$$

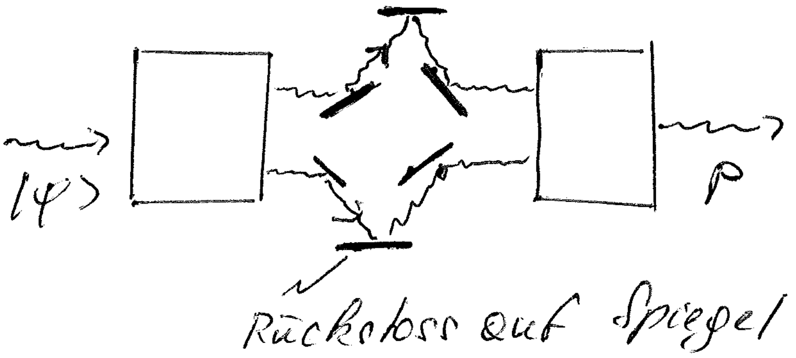
(kohärente Superposition von $|1\rangle, |2\rangle$) zu

$$P = |\langle 1|\psi\rangle|^2 |1\rangle\langle 1| + |\langle 2|\psi\rangle|^2 |2\rangle\langle 2| \qquad (18)$$

(inkohärente Superposition, konvexe Kombination) kann anhand folgender Anordnung illustriert werden. Verläuft die Aufspaltung und Rekombination ohne Wechselwirkung des Photons mit der Aussenwelt, so ist (17) der Ausgangszustand (was auf (9) führt).



Liegt aber eine solche Wechselwirkung vor, z.B. indem gemessen wird, welcher Pfad das Photon beschritten hat, so wird die Phasenrelation zwischen $|1\rangle$ und $|2\rangle$ zerstört, und stattdessen ist (18) der Ausgangszustand (was auf (8) führt).



Die Menge der gemischten Zuständen über $\mathcal{H}=\mathbb{C}$ kann als die Vollkugel $\{\vec{p}\in\mathbb{R}^3 \mid |\vec{p}|\leq 1\}$ aufgefasst werden; die reinen Zustände bilden darin die Kugeloberfläche (Extremalpunkte). Der reelle Vektorraum

$$\{\text{komplexe } 2\times 2 \text{ Matrizen } P \mid P = P^*\}$$

ist 4-dimensional. Eine bzgl. dem Skalarprodukt

$$(P_1, P_2) = \frac{1}{2}\,\mathrm{sp}(P_1 P_2)$$

orthonormierte Basis ist

$$\sigma_0 \equiv \mathbb{1} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$: Pauli-Matrizen). Damit ist

$$P = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{3} p_i \sigma_i = \frac{1}{2}(p_0 \mathbb{1} + \vec{p}\cdot\vec{\sigma})$$

mit

$$p_i = \mathrm{sp}\,(P\sigma_i). \qquad (19)$$

Wegen $(\vec{p}\cdot\vec{\sigma})^2 = \vec{p}^{\,2}$, $\mathrm{sp}\,\vec{p}\cdot\vec{\sigma} = 0$ sind die beiden Eigenwerte von P gleich $\frac{1}{2}(p_0 \pm |\vec{p}|)$.
Die Bedingungen $\mathrm{sp}\,P = 1$ und $P \geq 0$ bedeuten somit $p_0 = 1$ und $\frac{1}{2}(1 \pm |\vec{p}|) \geq 0$, d.h.

$$P = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \vec{p}\cdot\vec{\sigma}) \qquad \text{mit } |\vec{p}| \leq 1. \qquad (20)$$

Rein ist der Zustand, falls $\frac{1}{2}(1 \pm |\vec{p}|) = 0, 1$, d.h. falls $|\vec{p}| = 1$. Die Observablen

$$\sigma_1 = |45^\circ\rangle\langle 45^\circ| - |-45^\circ\rangle\langle -45^\circ|$$

$$\sigma_2 = |+\rangle\langle +| - |-\rangle\langle -|$$

$$\sigma_3 = |1\rangle\langle 1| - |2\rangle\langle 2|$$

entsprechen Analysatoren für $|\pm 45^\circ\rangle$, $|\pm\rangle$, $|1,2\rangle$ (vgl. (7)). Durch Messung ihrer Erwartungswerte (16) kann $\vec{p}$ (vgl. (18)) bestimmt werden.

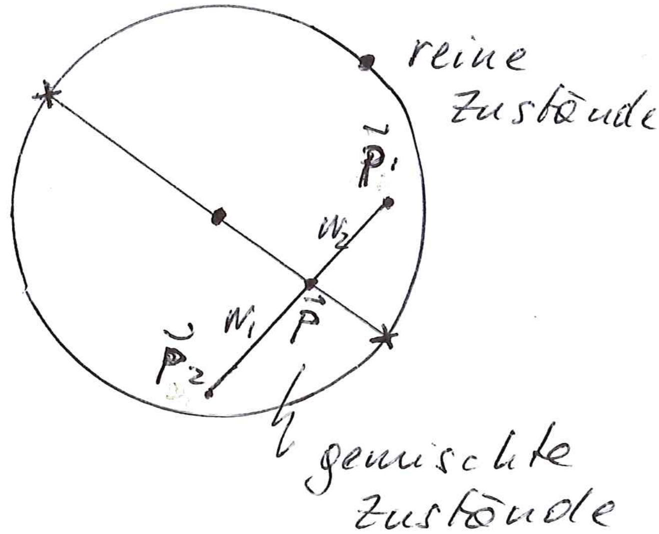
Die Zerlegung

$$P = w_1 P_1 + w_2 P_2 \qquad (21)$$

$(w_i \geq 0,\ w_1 + w_2 = 1)$ entspricht der konvexen Kombination

$$\vec{p} = w_1 \vec{p}_1 + w_2 \vec{p}_2 .$$

Geometrisch:



Punkte auf der Oberfläche $\{|\vec{p}|=1\}$ sind extremal: die Zerlegung (21) ist nur trivial möglich ($\vec{p}_1 = \vec{p}_2$ oder $w_1 = 0$ oder $w_2 = 0$). Zwei reine Zustände $|\varphi_1\rangle$, $|\varphi_2\rangle$ sind orthogonal gdf. $\vec{p}_1, \vec{p}_2$ antipodal sind; dies folgt aus $|\varphi_1\rangle\langle\varphi_1| + |\varphi_2\rangle\langle\varphi_2| = \mathbb{1}$, $\mathrm{sp}(\mathbb{1}\sigma_i) = 0$ und (19).

Punkte im Innern $\{|\vec{p}|<1\}$ sind nicht extremal. Die Zerlegung (21) ist sogar auf ∞ viele Arten möglich, selbst für $P_i = |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|$ rein; und eindeutig nur falls φ_1, φ_2 orthogonal (Spektraldarstellung; Ausnahme: $P = \mathbb{1}/2$, d.h. $\vec{p} = 0$).