# Theoretische Physik, Übung 13.

*FS15* *Abgabe: 27.05.15*

## 1. Stabilität des Wasserstoffatoms

Der Hamiltonoperator des Wasserstoffatoms ist

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{e^2}{|\vec{x}|}$$

auf $L^2(\mathbb{R}^3)$. Sein klassisches Gegenstück ist die Energie als Funktion von $(\vec{x}, \vec{p})$, gegeben durch den Ausdruck auf der rechten Seite.

Die Energien sind klassisch nicht nach unten beschränkt, quantenmechanisch jedoch schon. Als heuristischer Grund dieser Stabilität wird oft die Heisenbergsche Unschärferelation vorgebracht: Ein Elektron im Abstand $r$ vom Kern hat Impuls von der Ordnung $\Delta p \sim \hbar/r$, also Energie $\sim \hbar^2/(2mr^2) - e^2/r$, was als Funktion von $r > 0$ ein Minimum besitzt, und zwar für $r = a_0$, den Bohr-Radius $a_0 = \hbar^2/me^2$.

i) Die Überlegung taugt so nicht: Aus $\langle p_i^2 \rangle_\psi \geq \langle p_i^2 \rangle_\psi - \langle p_i \rangle_\psi^2 = \langle (\Delta p_i)^2 \rangle_\psi$ und desgleichen für $x_i$ folgt zwar

$$\langle \vec{p}^2 \rangle_\psi \langle \vec{x}^{\,2} \rangle_\psi \geq \sum_{i=1}^{3} \langle p_i^2 \rangle_\psi \langle x_i^2 \rangle_\psi \geq \frac{3\hbar^2}{4}$$

und damit

$$\langle H \rangle_\psi \geq \frac{3\hbar^2}{8m} \frac{1}{\langle \vec{x}^{\,2} \rangle_\psi} - e^2 \Big\langle \frac{1}{|\vec{x}|} \Big\rangle_\psi \ ;$$

aber (zeige!) es gibt Zustände $|\psi\rangle$, die die rechte Seite beliebig gross und negativ machen.

*Hinweis:* Wähle $\psi(\vec{x})$ als Superposition zweier Wellenfunktionen: eine weg vom Kern, die andere sehr nahe.

ii) Eine in dieser Hinsicht bessere Unschärferelation ist die Hardy-Ungleichung

$$-\Delta \geq \frac{1}{4\,\vec{x}^{\,2}} \tag{1}$$

(im Sinne quadratischer Formen, d.h. quantenmechanischer Erwartungswerte). Zeige damit: $H \geq -C$ für ein $C > 0$.

*Hinweis:* $\vec{p}^2 = -\hbar^2 \Delta$.