

Theoretische Physik, Übung 8.

FS15

Abgabe: 22.04.15

1. Lorentz-Transformationen auf der Himmelskugel

Die Lage der Sterne auf der Himmelskugel ist die Richtung, aus der ihr Licht kommt. Das Licht eines Sterns kommt bzgl. zweier Inertialsysteme aus verschiedenen Richtungen (Aberration), weil diese zueinander gedreht oder aber bewegt sind. Somit sehen die beiden Beobachter den Sternenhimmel anders. Zeige: Die Transformation ist Möbius.

Eine Transformation der erweiterten komplexen Ebene $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ heisst Möbius, falls sie von der Form ist

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}, \quad (a, b, c, d \in \mathbb{C}),$$

mit $ad - bc \neq 0$. Die Zusammensetzung von Möbius-Transformationen entspricht dem Produkt der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Zwei Matrizen A, B definieren die selbe Transformation, genau dann falls $B = \lambda A$, $\lambda \neq 0$. Die Normierung $\det A = 1$ lässt noch die Wahl $\lambda = \pm 1$ offen. Die Möbius-Gruppe ist deshalb $\text{SL}(2, \mathbb{C})/\{\pm 1\}$.

Die Ebene $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ kann mittels der stereographischen Projektion als die Riemann-Kugel $S^2 = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^3 \mid |\vec{v}| = 1\}$ aufgefasst werden. In beiden Beschreibungen (Ebene oder Kugel) ist eine Transformation genau dann Möbius, falls sie kreis- und orientierungstreu ist.

Zeige, dass eine Lorentz-Transformation $\Lambda \in L_+^\uparrow$ eine Möbius-Transformation $\pm A$ auf der S^2 induziert, wenn diese als die Himmelskugel der Richtungen des Lichts aufgefasst wird. Beachte dazu, dass Lorentz-Transformationen durch die folgenden Eigenschaften charakterisiert sind:

i) Forminvarianz des Trägheitsgesetzes

$$\vec{x} = \vec{b} + \vec{v}t \iff \vec{x}' = \vec{b}' + \vec{v}'t';$$

ii) Invarianz der Lichtgeschwindigkeit ($c = 1$)

$$|\vec{v}| = 1 \iff |\vec{v}'| = 1.$$

Betrachte die Abbildung $S : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$, $\vec{v} \mapsto \vec{v}'$, die durch Λ auf die Geschwindigkeiten induziert wird. Zeige mittels (i), dass S geradentreu ist, obschon S im Gegensatz zu $\Lambda : \mathbb{R}^4 \mapsto \mathbb{R}^4$ nicht linear ist. *Hinweis:* Was bedeutet die Eigenschaft "die Punkte $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ liegen auf einer Geraden im \mathbb{R}^3 " anhand von Trägheitsbahnen im \mathbb{R}^{1+3} ?

Anhand von (ii) schliesse, dass S Kreise auf S^2 auf ebensolche abbildet. *Hinweis:* Was ist ein solcher Kreis in Bezug auf $S^2 \subset \mathbb{R}^3$?

Das Ergebnis lässt sich zusammenfassen im Isomorphismus

$$L_+^\uparrow \cong \text{SL}(2, \mathbb{C})/\{\pm 1\}.$$

2. Dopplerverschiebung und Aberration

(a) Das Feld $\varphi(\vec{x}, t)$ sei ein Skalarfeld unter Lorentztransformationen $x' = \Lambda x$, d.h. $\varphi'(x') = \varphi(\Lambda^{-1}x')$. Zeige, dass bei einer Welle $\varphi(\vec{x}, t) = e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega t)}$ Frequenz und Wellenvektor einen 4er-Vektor $k \equiv (\omega/c, \vec{k})$ bilden.

Seien im Folgenden K und K' durch einen Boost $\Lambda = \Lambda(v\vec{e}_1)$ in 1-Richtung verbunden. Betrachte Licht der Fortpflanzungsrichtung \vec{e} und der Frequenz ω bzgl. K .

(b) Sei $\vec{e} = \vec{e}_1$. Berechne die Frequenz bzgl. K' (*Dopplerverschiebung*).

(c) Sei $\vec{e} = \vec{e}_2$. Bestimme den Winkel $\alpha(v)$ des Wellenvektors mit der 2-Achse bzgl. K' (*Aberration*).

3. Rechnen mit Tensoren

In der Basis e_1, e_2 für einen 2-dimensionalen Vektorraum sei eine Metrik gegeben durch

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Der Tensor T vom Typ $\binom{0}{2}$ sei definiert durch $T(a, b) = 2a^1b^2$, wobei (a^μ) und (b^μ) die Komponenten der Vektoren a und b bezüglich der Basis (e_μ) sind.

(a) Bestimme die Matrizen $(T_{\mu\nu}), (T_\mu{}^\nu), (T^\mu{}_\nu), (T^{\mu\nu})$. Was ist die Spur von T ?

(b) Betrachte die Basistransformation $\bar{e}_1 = e_1 + 2e_2, \bar{e}_2 = e_1$. Bestimme die Transformationsmatrizen $\Lambda^\mu{}_\nu, \Lambda_\mu{}^\nu$, sowie die transformierten Komponenten $\bar{g}_{\mu\nu}, \bar{T}^{\mu\nu}$.