Theoretische Physik, Übung 6.

FS15 *Abgabe: 1.04.15*

1. Greensche Funktion in $\mathbb{R}^{2+1}$

i) Finde die Greensche Funktion $D_2(\underline{x}, t)$ für das Anfangswertproblem

$$\Box u(\underline{x}, t) = 0, \qquad (\underline{x}, t) \in \mathbb{R}^{2+1},$$
$$u(\underline{x}, 0),\ \frac{\partial u}{\partial t}(\underline{x}, 0) \qquad \text{gegeben}$$

in Dimension 2.

Hinweis: Erweitere die Aufgabenstellung auf ein 3-dimensionales Problem mit $(\underline{x}, x_3, t) \in \mathbb{R}^{3+1}$, das translationsinvariant bzgl. x_3 ist, und berechne die 2-dimensionale Greensche Funktion aus der 3-dimensionalen, s. (3.10).

ii) In 3 Dimensionen wird $u(\vec{x}_1, t_1)$ durch die Werte von $u(\vec{x}_2, t_2)$ mit $(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)^2 = c^2(t_1 - t_2)^2$ (Lichtkegel) eindeutig bestimmt. Was ändert sich im 2-dimensionalen Fall?

2. Der Hertzsche Dipol

Als Hertzschen Dipol bezeichnet man einen zeitabhängigen Punktdipol $\vec{p}(t)$ mit

$$\rho(\vec{x}, t) = -\vec{p}(t) \cdot \vec{\nabla}\delta(\vec{x}), \qquad \vec{\imath}(\vec{x}, t) = \dot{\vec{p}}(t)\delta(\vec{x}).$$

i) Man verifiziere die Kontinuitätsgleichung.

ii) Berechne die retardierten elektromagnetischen Potentiale φ und $\vec{A}$ in der Lorenz–Eichung und daraus die elektromagnetischen Felder

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = -\vec{\nabla}\varphi(\vec{x}, t) - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}(\vec{x}, t), \qquad \vec{B}(\vec{x}, t) = \operatorname{rot} \vec{A}(\vec{x}, t).$$

Ordne die Beiträge nach Potenzen von r^{-1}.

iii) Die Richtung von $\vec{p}$ sei konstant. Wie liegen $\vec{E}$ und $\vec{B}$?

iv) Im zeitlich harmonischen Fall (Wellenlänge λ) diskutiere man, welche Terme für $r \gg \lambda$ und $r \ll \lambda$ überwiegen. Wie gross ist die relative Phase zwischen $\vec{E}$ und $\vec{B}$ in beiden Grenzfällen?

v) Man berechne den Poyntingvektor für $r \gg \lambda$, sowie die Winkelabhängigkeit der Leistung. Wie gross ist die insgesamt abgestrahlte Leistung?