Theoretische Physik, Übung 4.

FS15 *Abgabe: 18.03.15*

1. Elektrostatische Energie im äusseren Feld

Gegeben sei eine Ladungsverteilung $\rho(\vec{x})$ auf einer Umgebung von $\vec{x} = 0$, sowie ein äusseres Potential $\varphi(\vec{x})$, das dort nahezu konstant ist und dessen Quellen ausserhalb liegen. Zeige, dass elektrostatische Energie der Ersten im Feld $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$ des Zweiten wie folgt ausgedrückt werden kann:

$$W = e\varphi(0) - \vec{p} \cdot \vec{E}(0) - \frac{1}{6} \sum_{i,j=1}^{3} Q_{ij} \frac{\partial E_j}{\partial x_i}(0) + \dots , \tag{1}$$

wobei $e = \int d^3x\, \rho(\vec{x})$ die Gesamtladung ist, $\vec{p} = \int d^3x\, \vec{x}\rho(\vec{x})$ das Dipolmoment und $Q_{ij} = \int d^3x\, (3x_ix_j - \vec{x}^2\delta_{ij})\rho(\vec{x})$ das Quadrupolmoment.

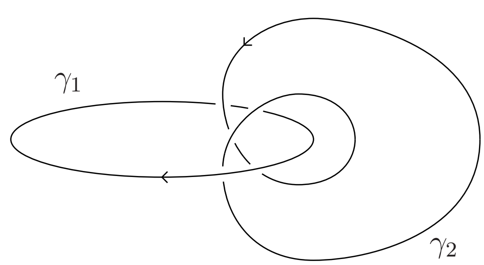
Hinweis: Entwickle das Potential φ in $W = \int d^3x \rho(\vec{x})\varphi(\vec{x})$ nach Taylor um $\vec{x} = 0$.

2. Gausssche Verkettungszahl

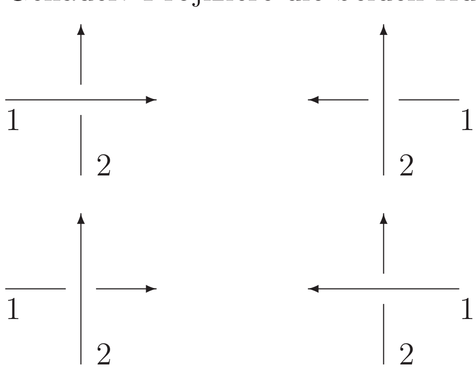
Die Gausssche Verkettungszahl zweier geschlossener Kurven γ_1, γ_2 ist definiert als

$$n(\gamma_1, \gamma_2) = \int_{\gamma_2} \int_{\gamma_1} \frac{(d\vec{s}_2 \wedge d\vec{s}_1) \cdot \vec{r}}{4\pi r^3}$$

mit derselben Bedeutung von $\vec{r}$ wie im Ampèreschen Kraftgesetz (2.1). Zeige: $n(\gamma_1, \gamma_2)$ ist eine ganze Zahl, die angibt, wie oft sich die eine Kurve um die andere windet ($n(\gamma_1, \gamma_2) = n(\gamma_2, \gamma_1)$).



Genauer: Projiziere die beiden Kurven auf eine Ebene; seien



positive

Kreuzungen.

negative

Dann ist $n(\gamma_1, \gamma_2) = (n_+ - n_-)/2$, wobei $n_\pm$ die Anzahl positiver/negativer Kreuzungen ist.

Hinweis: Mit $I_1 = I_2 = c = 1$ ist $n(\gamma_1, \gamma_2) = \int_{\gamma_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{s}_2$. Verwende den Satz von Stokes, um zu zeigen, dass dies eine Invariante unter Deformationen von γ_2 ist. Dasselbe gilt unter Zerlegungen wie in der Figur. Verwende dann Deformationen und Zerlegungen um Verkettungen aufs Einfachste zu reduzieren.