Übung 1. Thomson und Rayleigh Streuung

Lernziel: Der differentielle Wirkungsquerschnitt für die elastische Lichtstreuung an einem Atom zeigt energieabhängiges Verhalten. Thomson Streuung hochenergetischer Photonen wird durch einen konstanten Term dominiert; Rayleigh Streuung niederenergetischer Photonen hingegen durch einen zu ω^4-proportionalen Term. Dies erklärt, warum der Himmel blau ist und die Abendsonne rot.

Im Skript wurde die Kramers-Heisenberg Formel (19.69)

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = r_0^2 \frac{\omega_k'}{\omega_k} \left| \delta_{ab} \epsilon_{\boldsymbol{k}}^{\lambda} \cdot \epsilon_{\boldsymbol{k'}}^{\lambda' *} - \frac{1}{m} \sum_{\nu} \left[\frac{\langle b | \boldsymbol{\epsilon}_{\boldsymbol{k'}}^{\lambda' *} \cdot \boldsymbol{p} | \nu \rangle \langle \nu | \boldsymbol{\epsilon}_{\boldsymbol{k}}^{\lambda} \cdot \boldsymbol{p} | a \rangle}{E_\nu - E_a - \hbar\omega_k} + \frac{\langle b | \boldsymbol{\epsilon}_{\boldsymbol{k}}^{\lambda} \cdot \boldsymbol{p} | \nu \rangle \langle \nu | \boldsymbol{\epsilon}_{\boldsymbol{k'}}^{\lambda' *} \cdot \boldsymbol{p} | a \rangle}{E_\nu - E_a - \hbar\omega_{k'}} \right] \right|^2 \tag{1}$$

für den differentiellen Wirkungsquerschnitt der Streuung von Licht an einem Atom hergeleitet. Dabei ist $r_0 = e^2/mc^2$ der klassische Elektronenradius, m die Masse des Elektrons, $|\nu\rangle$ die Atomenzustände zur Energie E_ν. $|a\rangle$ und $|b\rangle$ sind die Ausgangs- und Endzustände des Atoms.

Einfallende Photonen werden durch ihre Energie $\hbar\omega_k = \hbar ck$, Impuls $\hbar\boldsymbol{k}$ und Polarisation $\boldsymbol{\epsilon}_{\boldsymbol{k}}^{\lambda}$ beschrieben; auslaufende Photonen durch die entsprechenden gestrichenen Symbole. Zudem gilt die Energieerhaltung $\hbar\omega_{k'} + E_b = \hbar\omega_k + E_a$. Folgende Grenzfälle sind abzuleiten:

(a) *Thomson Streuung* (elastische Lichtstreuung hochenergetischer Photonen)
Elastische Lichtstreuung bedeutet, dass $|a\rangle = |b\rangle$. Zeige

$$\left.\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right|_{\text{Thom}} = r_0^2 \left| \boldsymbol{\epsilon}_{\boldsymbol{k}}^{\lambda} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_{\boldsymbol{k'}}^{\lambda' *} \right|^2 , \tag{2}$$

unter der Annahme, dass $\hbar\omega_k \gg E_\nu - E_a$ für alle gebundenen Energieniveaus E_ν.

(b) *Rayleigh Streuung* (elastische Lichtstreuung niederenergetischer Photonen)
Die Annahmen sind jetzt $|a\rangle = |b\rangle$ und $\hbar\omega_k \ll E_\nu - E_a = \hbar\omega_{\nu a}$. Zeige

$$\left.\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right|_{\text{Ray}} = \left(\frac{r_0}{m\hbar}\right)^2 \omega_k^4 \left| \sum_{\nu} \frac{\langle a | \boldsymbol{\epsilon}_{\boldsymbol{k'}}^{\lambda' *} \cdot \boldsymbol{r} | \nu \rangle \langle \nu | \boldsymbol{\epsilon}_{\boldsymbol{k}}^{\lambda} \cdot \boldsymbol{r} | a \rangle + \langle a | \boldsymbol{\epsilon}_{\boldsymbol{k}}^{\lambda} \cdot \boldsymbol{r} | \nu \rangle \langle \nu | \boldsymbol{\epsilon}_{\boldsymbol{k'}}^{\lambda' *} \cdot \boldsymbol{r} | a \rangle}{\hbar\omega_{\nu a}} \right|^2 . \tag{3}$$

(c) Erkläre, warum der Himmel blau ist und die Abendsonne rot.

Übung 2. Wirkungsquerschnitt für resonante Photonenabsorption

Lernziel: Der Wirkungsquerschnitt für resonante Photonenabsorption ist wesentlich grösser als von einer naiven Betrachtung erwartet.

Wir betrachten ein Atom mit Grundzustand $|g\rangle$ und angeregtem Zustand $|e\rangle$. Der Dipolübergang von $|g\rangle$ nach $|e\rangle$ sei für Photonen mit der polarisation λ zulässig; z.B. $|g\rangle = |1s\rangle$ und $|e\rangle = |2p\rangle$ mit dem p-Zustand in x-Richtung orientiert und λ einer linearen Polarisation in besagter Richtung.

Wir berechnen den Wirkungsquerschnitt für resonante Photonen, d.h. $\hbar\omega \approx E_e - E_g$.

(a) Das angeregte Niveau E_e wird aufgrund der Kopplung zum elektromagnetischen Feld verbreitert. Zeige, dass die spontane Emissionsrate durch

$$W^{\text{em}} = \frac{4}{3}\alpha\frac{\omega^3}{c^2}\,|\langle e|\boldsymbol{r}|g\rangle|^2$$

gegeben ist, wobei die Feinstrukturkonstante $\alpha = e^2/\hbar c \approx 1/137$.

(b) Wir besetzen die Mode $(\boldsymbol{k}, \lambda)$ mit $n_{\boldsymbol{k},\lambda} = n$ Photonen, $\hbar ck \approx E_e - E_g$. Zeige, dass die Übergangsamplitude für die Absorption eines Photons im Zeitintervall $[t_0, t]$ gegeben ist durch

$$\langle e|\Psi(t)\rangle = \Big(\frac{2\pi\hbar n}{\omega V}\Big)^{1/2}\frac{e}{m}\boldsymbol{\epsilon}_{\boldsymbol{k}}^{\lambda}\cdot\langle e|e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\boldsymbol{\nabla}|g\rangle\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}s\, e^{i(E_e-E_g-\hbar\omega)s/\hbar}e^{-W^{\text{em}}s/2}\,,$$

bis auf einen irrelevanten Phasenfaktor.

Hinweis: Folge der Herleitung von(19.26) im Skript. Die Verbreiterung des Energieniveaus E_e *wird durch eine imaginäre Energie* $E_e \rightsquigarrow E_e - i\hbar W^{\text{em}}/2$ *beschrieben.*

(c) Berechne die Absorptionsrate

$$W^{\text{abs}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\langle e|\Psi(t)\rangle|^2 \underset{t=-t_0\to\infty}{\longrightarrow} 8\pi\alpha\,\frac{\omega}{W^{\text{em}}}\,c\,\frac{n}{V}|\langle e|\boldsymbol{r}|g\rangle|^2$$

für $\hbar\omega \approx E_e - E_g$ und in der Dipolnäherung ($e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \approx 1$).

(d) Zeige, dass die (einfallende) Photonenstromdichte j gegeben ist durch $j = nc/V$.

(e) Berechne den Absorptions-Wirkungsquerschnitt $\sigma^{\text{abs}} = W^{\text{abs}}/j$ für resonante Photonen. Was ist die Längenskala?