Übung 1. Quanten-Dot in der elektromagnetischen Strahlung

Lernziel: In dieser Frage behandeln wir die Interaktion von Materie mit Strahlung und berechnen die Absorptionsrate mit Hilfe von Fermis Goldener Regel.

Einen Quanten-Dot kann man als Elektronensystem in einem dreidimensionalen harmonischen Oszillator modellieren. Jeder Zustand kann dann als Tensorprodukt von drei Zuständen des eindimensionalen harmonischen Oszillators geschrieben werden: $|n_x, n_y, n_z\rangle = |n_x\rangle \otimes |n_y\rangle \otimes |n_z\rangle$. Da die Gesamtenergie $\epsilon_n = \hbar\omega_d(n + 3/2)$ nur von der Summe der drei Quantenzahlen $n = n_x + n_y + n_z$ abhängt, sind die angeregten Zustände, d.h. $n > 0$, entartet. Betrachte das System im Grundzustand $|0, 0, 0\rangle$ unter Wirkung der polarisierten, monochromatische, elektromagnetischen Strahlung (nicht quantisiert)

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{L^3}} \left[A\,\vec{e}\,e^{i\vec{k}\vec{r}-i\omega t} + A^* \vec{e}^* e^{-i\vec{k}\vec{r}+i\omega t} \right] \quad \text{mit} \quad \vec{k} = (0, 0, k)\,. \tag{1}$$

Die Übergangswahrscheinlichkeit des Systems in den angeregten Zustand $|n_x, n_y, n_z\rangle$ ist durch die Goldene Regel gegeben als

$$\Gamma_{0\to(n_x,n_y,n_z)} = \frac{2\pi}{\hbar}\delta(\epsilon_n - \epsilon_0 - \hbar\omega)\frac{e^2}{L^3c^2}|A|^2 |\langle n_x, n_y, n_z|\hat{\vec{j}}(-\vec{k}) \cdot \vec{e}|0, 0, 0\rangle|^2\,, \tag{2}$$

wobei $\hat{\vec{j}}(\vec{k})$ die paramagnetische Stromdichte im Impulsraum ist, d.h.

$$\hat{\vec{j}}(-\vec{k}) = \int d^3r e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\hat{\vec{j}}(\vec{r}) = \frac{1}{2}\left[\frac{\hat{\vec{p}}}{m}e^{i\vec{k}\cdot\hat{\vec{r}}} + e^{i\vec{k}\cdot\hat{\vec{r}}}\frac{\hat{\vec{p}}}{m}\right]\,. \tag{3}$$

Seien $a_i^\dagger$ und a_i die Auf- bzw. Absteigeoperatoren der Zustände $|n_i\rangle$. Bestimme die Matrixelemente $\langle n_x, n_y, n_z|\hat{\vec{j}}(\vec{k}) \cdot \vec{e}|0, 0, 0\rangle$ durch Substitution von $\hat{\vec{r}} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_d m}}(a_x + a_x^\dagger, a_y + a_y^\dagger, a_z + a_z^\dagger)$ und $\hat{\vec{p}} = -i\sqrt{\frac{\hbar\omega_d m}{2}}(a_x - a_x^\dagger, a_y - a_y^\dagger, a_z - a_z^\dagger)$. Betrachte die Fälle von linear polarisierter, $\vec{e} = (1, 0, 0)$, und zirkulär polarisierter, $\vec{e} = (1, \pm i, 0)/\sqrt{2}$, Strahlung. Gib die totale Absorbtionsrate als Funktion von ω an:

$$\Gamma_{0\to X}(\omega) = \sum_{n_x,n_y,n_z} \Gamma_{0\to(n_x,n_y,n_z)}\,. \tag{4}$$

Hinweis: Benutze die Baker-Hausdorff Beziehung:

$$e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A,B]}\,, \quad \textit{wenn} \quad [A, [A, B]] = [A, [A, B]] = 0\,. \tag{5}$$

Exercise 2. Jaynes-Cumming model

Goal: The Jaynes-Cumming model is a theoretical model of great interest in atomic physics, quantum optics, and solid state quantum information circuits. In this question we will learn its basic properties and behaviours.

The Jaynes-Cumming (JC) model describes the interaction of a single two-level system with a single quantized mode of radiation. The two-level system can be either in its ground state $|g\rangle$ or its excited state $|e\rangle$, and has a transition frequency ω_0. The state of the single mode of radiation, with frequency ω, is described by $|n\rangle$. The JC Hamiltonian can then be written as

$$H = \frac{1}{2}\hbar\omega_0\sigma_z + \hbar\omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right) + \hbar g\left(\sigma_+ a + \sigma_- a^\dagger\right) , \tag{6}$$

where g is the coupling constant and

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} , \qquad \sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \qquad \sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \tag{7}$$

in the basis $|g\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $|e\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(a) Find the eigenstates and eigenvalues of H for $g = 0$ (uncoupled) and $g > 0$ (coupled). Draw the energy spectrum for the case $\omega = \omega_0$.

In the following two questions let $\omega = \omega_0$.

(b) Assume the initial state of the system is $|e, 0\rangle$. What is the probability to find the two-level system in its ground state for $t > 0$? Explain the physical process behind this.

(c) Let $\hbar\omega_p$ be the lowest non-zero energy level of the JC Hamiltonian (according to the calculation done in (a)). Consider the system described by the JC model as before in its lowest eigenstate (i.e., the initial state is $|g, 0\rangle$), together with a light beam of photons with energy $\hbar\omega_p$ each outside of the system. The beam is projected on the system such that the photons could enter the cavity. What will happen? Can the first photon enter the system? Can the second enter? Explain why. This phenomena is called "Photon blocking".