Übung 1. Die lineare Atomkette

Lernziel: Das Ziel dieser Übung ist es, noch mal explizit ein Model zu quantisieren.

Wir betrachten eine lineare Atomkette, deren sämtliche Atome die gleiche Masse m haben und sich in der Gleichgewichtslage in einem jeweiligen Abstand l voneinander befinden. Die einzelnen Atome unterscheiden wir durch die Indizes i und bezeichnen die Abweichung des i-ten Atoms aus der Ruhelage mit $\Phi_i(t)$. Wir nehmen an, dass die Kette zyklisch geschlossen ist, d.h. dass für Φ_i eine periodische Randbedingung $\Phi_i(t) = \Phi_{i+N}(t)$ gilt. Die Kopplung zwischen den Atomen beschreiben wir durch harmonische Kräfte, die eine Federkonstante k besitzen. Die klassische Newtonsche Bewegungsgleichung für das i-te Atom ist dann durch die Gleichung

$$m\frac{\mathrm{d}^2\Phi_i}{\mathrm{d}t^2} = k(\Phi_{i+1} - \Phi_i) - k(\Phi_i - \Phi_{i-1}) \tag{1}$$

gegeben.

Finde die klassische Lagrangefunktion bezüglich der Koordinaten Φ_i. Quantisiere dann das System der Atomkette indem die Vertauschungsrelationen $[\Phi_i, \pi_j] = i\hbar\delta_{ij}$ gefordert werden, wobei π_i der zu Φ_i gehörige kanonische Impuls ist. Drucke den Hamiltonoperator mithilfe den Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $a^\dagger$ und a aus.

Exercise 2. Lattice models

Goal: The goal of this exercise is to become familiar with what is often referred to as 'hopping models' or 'lattice models', in which particles move only on a lattice. We practise the use of second quantization in such models, and will see how such lattice models can be derived from continuous models.

In condensed matter theory one often considers one of the simplest interacting lattice models, namely the (fermionic) Hubbard model. In this model electrons with spin can hop from lattice site i to site $i+1$ (and vice versa) with an amplitude t, while preserving their spin. In addition if two electrons with opposite spin sit on the same site i, the energy of the system is increased by U. We will work with an N-site 1D lattice with periodic boundary conditions.

(a) Introduce creation and annihilation operators for electrons at site i with spin σ, and give an expression for the (fermionic) Hubbard Hamiltonian in these operators.

(b) Consider the non-interacting case ($U = 0$). Compute the dispersion relation (energy as a function of momentum) for this model.

(c*) The Hamiltonian can be written in terms of field operators $\psi_\sigma^\dagger(r)$ as

$$\begin{aligned} H = &\sum_\sigma \left[\int \mathrm{d}r\, \psi_\sigma^\dagger(r)\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(r)\right)\psi_\sigma(r)\right] + \\ &\sum_{\sigma,\sigma'}\left[\int\int \mathrm{d}r\,\mathrm{d}r'\, \psi_\sigma^\dagger(r)\psi_{\sigma'}^\dagger(r')U_{\sigma,\sigma'}(r-r')\psi_{\sigma'}(r')\psi_\sigma(r)\right], \end{aligned} \tag{2}$$

where $V(r)$ is a periodic potential and $U_{\sigma,\sigma'}(r-r')$ describes a two-body interaction. Derive the corresponding lattice model (which you wrote down in part a) from this Hamiltonian. What assumptions are needed?