Übung 1. Vertauschung identischer Teilchen

Lernziel: Dass Teilchen mit halbzahligem Spin antisymmetrische Wellenfunktionen besitzen, Teilchen mit ganzzahligem Spin hingegen symmetrische, lässt sich im Rahmen der lokalen Quantenfeldtheorie zeigen. In dieser Aufgabe wollen wir jedoch einen Ansatz betrachten, mit Hilfe dessen sich das Ergebnis anschaulich darstellen lässt. Dazu betrachten wir die Vertauschung der Teilchen durch Rotation um π um das Zentrum zwischen den beiden Teilchen, indem wir diese Vertauschung mit Hilfe des Gesamtdrehimpulsoperators generieren.

Betrachte die Wirkung des unitären Operators $U(\pi) = e^{-i\pi J_z} = e^{-i\pi L_z} e^{-i\pi S_z}$ auf die Wellenfunktion $\psi(x, x')$ zweier identischer Teilchen, und zeige, dass man dadurch eine Phase erhält, die entsprechend des Spins der Teilchen ein gerades oder ungerades Vielfaches von π enthält.

Übung 2. Zeitentwicklung und Messungen für ununterscheidbare Teilchen

Lernziel: Wir sehen, dass die Zeitentwicklung gemäss der Schrödingergleichung kompatibel mit dem Symmetrisierungspostulat ununterscheidbarer Teilchen ist. Wir zeigen: Wenn der Ketzustand (anti-)symmetrisiert wird, ist es nicht nötig, den Ket, der die Messresultate bezeichnet, auch explizit zu (anti-)symmetrisieren.

(a) Betrachte N ununterscheidbare Teilchen in einem Zustand $|\psi\rangle$. Argumentiere, warum der Vertauschungsoperator U_π mit dem Hamiltonian kommutieren muss. Zeige, dass durch die Zeitentwicklung der Zustand für Bosonen immer symmetrisch, bzw. für Fermionen immer antisymmetrisch bleibt.

(b) Zeige, dass der (Anti-)Symmetrisierungsoperator ein Projektor ist, d.h. $S^2 = S$ und $A^2 = A$. Wie wird ein Basisket des Tensorproduktraums nach der (Anti-)Symmetrisierung normiert?

(c) Betrachte eine 1-Teilchen Observable $\mathcal{A}$, die auf die N identischen Teilchen im Zustand $|\psi\rangle$ durchgeführt wird. Betrachte das Messresultat, in welchem die N Werte $\{a_{\alpha_1}, a_{\alpha_2}, \dots, a_{\alpha_N}\}$ beobachtet geworden sind.

Nimm erst an, dass $\mathcal{A}$ die Spektralzerlegung $\mathcal{A} = \sum_\alpha a_\alpha |u_\alpha\rangle\langle u_\alpha|$ (mit 1-Dimensionalen Eigenräumen) hat, und dass die Werte $\{a_{\alpha_1}, a_{\alpha_2}, \dots\}$ paarweise ungleich sind.

(i) Zeige, dass die Wahrscheinlichkeit diese Werte durch eine Messung zu erhalten gegeben ist durch:

$$\text{Prob}\left[\{a_{\alpha_1}, a_{\alpha_2}, \dots a_{\alpha_N}\}\right] = N! \cdot |(\langle u_{\alpha_1}| \otimes \langle u_{\alpha_2}| \otimes \cdots \otimes \langle u_{\alpha_N}|)|\psi\rangle|^2 \,. \tag{1}$$

(ii) Man präpariere N unterscheidbare Teilchen in einem (anti-)symmetrisierten Zustand $|\psi\rangle$. Welches ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Werte $\{a_{\alpha_1}, a_{\alpha_2}, \dots, a_{\alpha_N}\}$ (in einer beliebige Reihenfolge) in einer Messung von $\mathcal{A}$ vorkommen?

(iii) Betrachte jetzt den allgemeinen Fall: es darf $\mathcal{A}$ eine beliebige Observable sein, und die gemessenen Werte können gleich sein. Bei der Projektion durch Messung auf den Zustand $\langle\chi|$, zeige, dass um die Amplitude zu rechnen, der (Anti-)symmetrisierungsvorgang entweder auf den Bra $\langle\chi|$, den Zustand $|\psi\rangle$ der N Teilchen oder auf beide angewandt werden (bis zu einem Normierungsfactor).

Übung 3. Gekoppelte Anyonen

Lernziel: Für ununterscheidbare Teilchen in 2D sind verschiedene nichttriviale Phasenänderungen beim Austausch der Teilchen möglich, im Gegensatz zum 3D Fall, wo die Teilchen immer Fermionen (Phasenänderung -1) oder Bosonen ($+1$) sind. Solche 2D Teilchen nennt man Anyonen und werden hier untersucht.

Wir betrachten zwei gekoppelte identische Teilchen in 2D. Die Schwerpunktsbewegung wird vernachlässigt und die Relativbewegung wird durch die Schrödingergleichung

$$E\psi(r,\phi) = H\psi(r,\phi) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}\right) + V(r)\right]\psi(r,\phi) \tag{2}$$

beschrieben, wobei $V(r)$ einen Potentialterm beschreibt, der lediglich von der relativen Distanz zwischen den beiden Teilchen abhängt.

(a) Leite die oben angegebene Form für H her.

(b) Finde die irreduziblen Darstellungen der Gruppe $SO(2)$ auf dem zu H entsprechende Hilbertraum. Leite ihre Eigenfunktionen $\Psi_\ell(\phi)$ her, und zeige, dass gilt

$$\Psi_\ell(\phi + \theta) = e^{i\ell\theta}\Psi_\ell(\phi). \tag{3}$$

Welche Werte von ℓ sind erlaubt?

(c) Wir interessieren uns für die projektiven Darstellungen der Gruppe $SO(2)$, d.h., Darstellungen U_R, welche die Gruppenkompatibilitätsbedingung $U_R U_{R'} = U_{RR'}$ $(R, R' \in SO(2))$ nur bis auf einen Phase erfüllen.

Welches sind die möglichen projektiven Darstellungen (welche Werte von ℓ sind erlaubt)? Vergleiche mit den 3D Fall.

(d) Wir betrachten nun zuerst, wie sich die uns bereits bekannten Bosonen und Fermionen (also projektive Darstellungen von $SO(3)$ mit ganz- und halbzahligem Spin) in 2D verhalten. Welche Werte von ℓ sind für Bosonen und Fermionen möglich, wenn man zusätzlich noch annimmt, dass die Spinwellenfunktion gerade ist unter Vertauschung der Teilchen?

(e) Wir wenden uns nun den neuen Teilchen zu, welche die Gruppe $SO(2)$ durch ihre projektiven Darstellungen zulässt (Anyonen). In diesem Fall kann der Index der Eigenfunktionen Ψ_ν beliebige Werte $\nu \in \mathbb{R}$ annehmen. Betrachte die Wirkung der symmetrischen Gruppe S_2 auf die Teilchen und bestimme das Verhältnis des Systems unter Austausch der Teilchen.

(f*) Wir können Eichtransformationen durchführen, indem wir die (lokalen) Phasen der Basiskets $|r,\theta\rangle$ beliebig umdefinieren. Erinnert dich dieses Vorgehen an eine andere physikalische Situation? Wähle eine Eichung, in welche die Wellenfunktion entsprechende Randbedingungen erfüllt und somit wohl definiert wird.

Wie sieht der Hamiltonoperator in dieser Eichung aus?